



جواب تمرینات

ریاضی دہم



تمرین

۱ فرض کنید U مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید $U = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, \dots\}$

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟ **نامتناهی**

پ) یک زیرمجموعه متناهی از U بنویسید. $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$

ت) دو زیرمجموعه نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به طوری که $C \subseteq D$.

$D = \{1, 2, 3, \dots\}$, $C = \{2, 4, 6, \dots\}$

۲ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی. **نامتناهی**

ب) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶. **متناهی**

پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. **نامتناهی**

ت) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$. **متناهی زیرا $A = \emptyset$**

ث) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰. **نامتناهی**

۳ دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد.

$$[0, 2] \text{ , } [2, +\infty) \xrightarrow{\cap} \{2\}$$



۴ حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید:

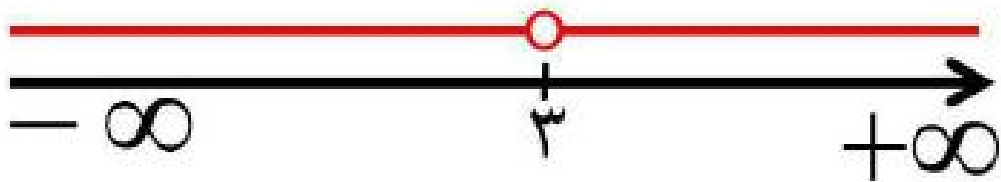
$$\text{الف) } (-3, 5] = (-3, 0) \cup (-2, 5] \quad \text{ب) } (2, 6] = (-\infty, 6] \cap (2, 9)$$

$$\text{پ) } (6, 10] = (3, +\infty) \cap (6, 10] \quad \text{ت) } \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = (-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$$

$$\text{ث) } [4, +\infty) = (3, +\infty) - [2, 4) \quad \text{ج) } [2, 3] = [2, 4) - (3, +\infty)$$

۵ مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه

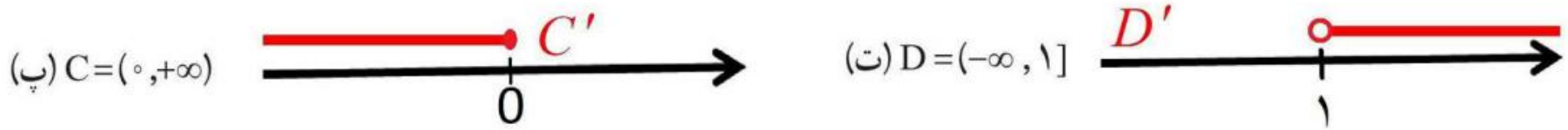
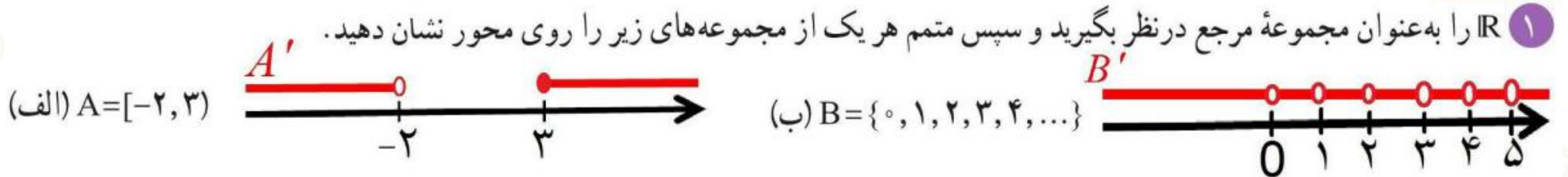
بنویسید.



$$(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$

۶ اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

متناهی



۲ IR را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

(الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج $A =$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد $A' =$

(ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

$B = \{5, 6, 7, \dots\}$ $B' = \{1, 2, 3, 4\}$

(پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

نامتناهی $C = \{2, 3, 5, 7\}$ $C' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$

۳ اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$$

$$30 = 15 + n(B) - 5 \Rightarrow n(B) = 20$$



۴ فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 100$ ، $n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ مطلوب است:

(الف) $n(A \cup B)$ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$
 $n(A \cup B) = 60 + 40 - 20 = 80$

(ب) $n(A \cap B')$ $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 60 - 20 = 40$

(پ) $n(A' \cap B)$ $n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 40 - 20 = 20$

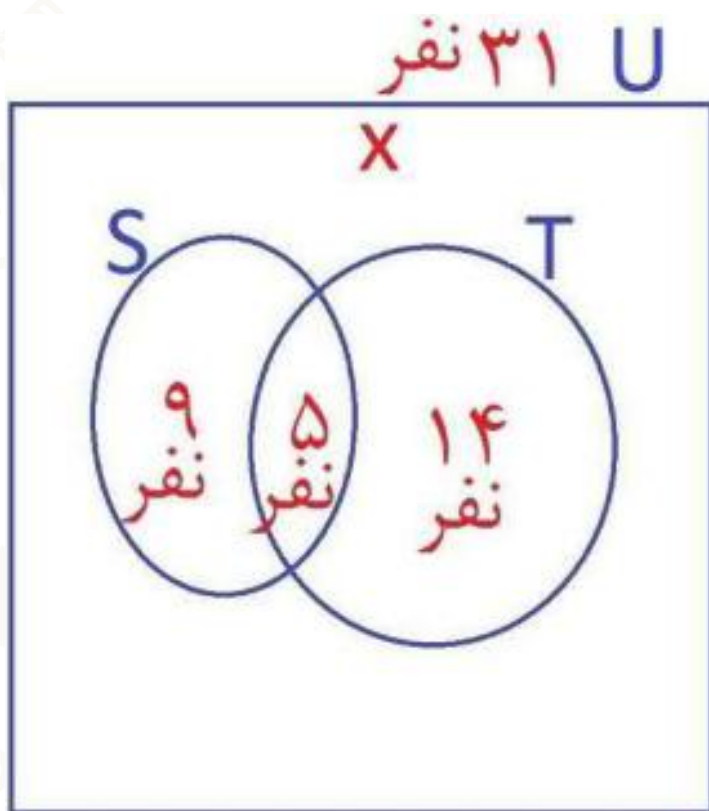
(ت) $n(A' \cap B')$ $n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 80 = 20$

۵ در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو

گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

(الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند. ۹

(ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند. $x + 14 + 5 + 9 = 31 \Rightarrow x = 3$





۶ در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 57 - 32 = 95 = \text{دست کم}$$

حداقل = به معنای اجتماع

ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند. $70 - 32 = 38$

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

$$A \text{ فقط شرکت} + B \text{ فقط شرکت} = (70 - 32) + (57 - 32) = 38 + 25 = 63$$

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = 110 - 95 = 15$$



تمرین

۱ به الگوی زیر توجه کنید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی های تیره آن را مشخص کنید. ۱۲ کاشی تیره

ب) تعداد کاشی های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید. ۶ و ۸ و ۱۰ و ۱۲ و ۱۴ و ۱۶ و ۱۸ و ...

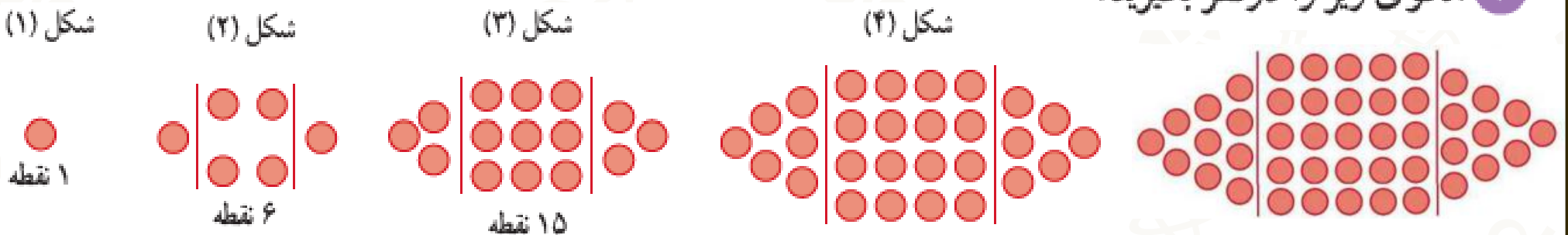
پ) اگر n تعداد کاشی های سفید و t_n تعداد کاشی های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید. $t_n = 2(n+2) = 2n+4$

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟ $t_{100} = 2 \times 100 + 4 = 204$

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ بله اگر هست، تعداد کاشی های سفید آن چند است؟

تعداد کاشی های سفید ۲۳ است. $t_n = 50 \Rightarrow 2n + 4 = 50 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = 23$

۲ الگوی زیر را در نظر بگیرید.



$$t_1 = 1^2 + 0 \times 1 \quad t_2 = 2^2 + 1 \times 2 \quad t_3 = 3^2 + 2 \times 3 \quad t_4 = 4^2 + 3 \times 4 \quad t_5 = 5^2 + 4 \times 5$$

الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

۶ و ۱۵ و ۲۸ و ۴۵ و ۶۶ و ۹۱ و ...

ب) جمله عمومی الگو را بیابید. $t_n = n^2 + (n-1)n \Rightarrow t_n = 2n^2 - n$

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟ $t_{10} = 2 \times 10^2 - 10 = 190$



۳ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

(الف) $a_n = 4n$

... و ۴ و ۸ و ۱۲ و ۱۶

(ب) $b_n = 3n + 1$

... و ۴ و ۷ و ۱۰ و ۱۳

(پ) $c_n = n^2 + 2$

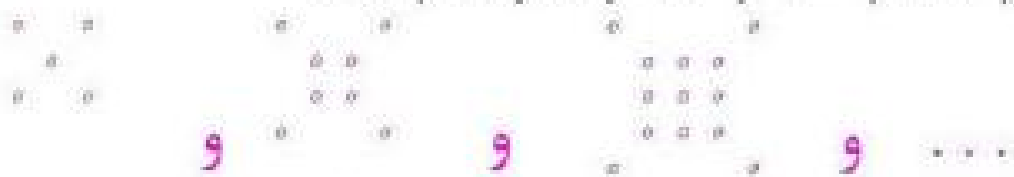
... و ۳ و ۶ و ۱۱ و ۱۸

(ت) $d_n = n^2 + n$

... و ۲ و ۶ و ۱۲ و ۲۰

۴ برای دنباله‌های درجه دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی هر دنباله را بیابید.

(الف) ۵, ۸, ۱۳, ۲۰, ۲۹, ...



$t_1 = 1^2 + 4$

$t_2 = 2^2 + 4$

$t_3 = 3^2 + 4$

$t_n = n^2 + 4$

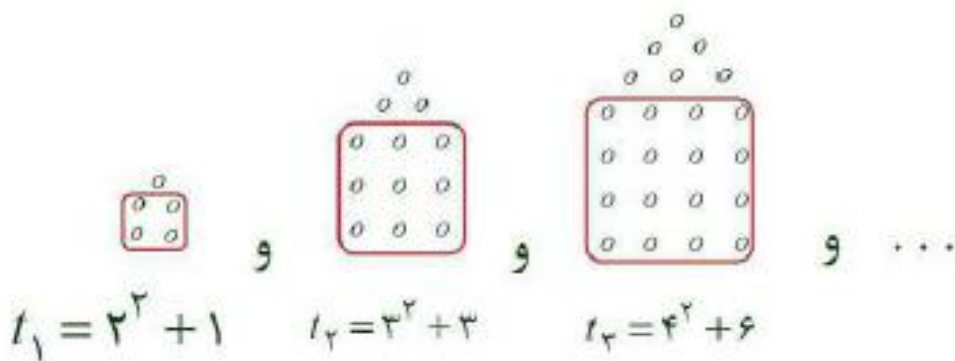
(ب) ۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, ...

یاد آوری: دنباله ... و ۶ و ۳ و ۱ دنباله مثلثی

با جمله عمومی $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است.

بنابراین $t_n = (n+1)^2 + a_n$ در نتیجه:

$t_n = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2}$



$t_1 = 2^2 + 1$

$t_2 = 3^2 + 3$

$t_3 = 4^2 + 6$



۱ از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست و یکم را بیابید.

الف) $d = 7$ و حسابی $3, 10, 17, 24, \dots$

$$t_{21} = a + 20 \cdot d = 3 + 140 = 143$$

ب) $d = \sqrt{3}$ و حسابی $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots$

$$t_{21} = a + 20 \cdot d = \sqrt{3} + 20 \cdot \sqrt{3} = 21\sqrt{3}$$

ث) $d = \frac{1}{5}$ و حسابی $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$

$$t_{21} = a + 20 \cdot d = \frac{2}{5} + \frac{20}{5} = \frac{22}{5}$$

ناحسابی $1, 2, 4, 8, \dots$

ت) $d = -3$ و حسابی $10, 7, 4, 1, \dots$

$$t_{21} = a + 20 \cdot d = 10 + (-60) = -50$$

ج) $d = 0$ و حسابی $2, 2, 2, 2, \dots$

$$t_{21} = a + 20 \cdot d = 2 + 0 = 2$$



۲ در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب 20 و 56 است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

$$d = \frac{t_7 - t_3}{7 - 3} = \frac{56 - 20}{4} = 9 \quad \xrightarrow{t_3 = a + 2d = 20}$$

$$a + 18 = 20 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \text{دنباله: } 2, 11, 20, 29, \dots$$

۳ در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول 3 و مجموع سه جمله بعدی آن 39 است. دنباله را مشخص کنید

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 3 \\ t_4 + t_5 + t_6 = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + a + d + a + 2d = 3 \\ a + 3d + a + 4d + a + 5d = 39 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 3d = 3 \\ 3a + 12d = 39 \end{cases} \xrightarrow{\times(-)} \begin{cases} -3a - 3d = -3 \\ 3a + 12d = 39 \end{cases}$$

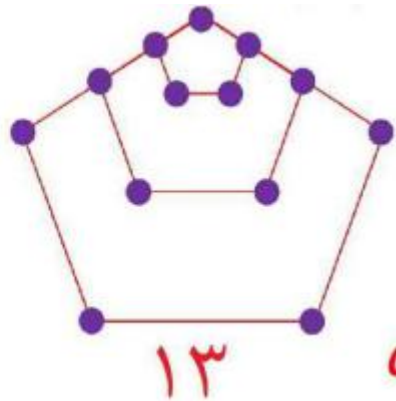
$$\underline{9d = 36}$$

$$\Rightarrow d = 4 \Rightarrow a = -3 \quad \text{دنباله: } -3, 1, 5, 9, \dots$$

۴ الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.
ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید. دنباله از نوع حسابی است: $1, 5, 9, 13, \dots$

$$a = 1, d = 4 \Rightarrow$$

$$t_n = 1 + (n - 1) \times 4 \Rightarrow t_n = 4n - 3$$



ب) جمله چندم این دنباله 397 است؟

$$t_n = 397 \Rightarrow 4n - 3 = 397 \Rightarrow n = 100$$



۵ الف) واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟ $d = \frac{t_3 - t_1}{3 - 1} = \frac{11 - 5}{2} = 3 \Rightarrow 5, \boxed{8}, 11$

ب) واسطه حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟ $d = \frac{t_3 - t_1}{3 - 1} = \frac{30 - 20}{2} = 5 \Rightarrow 20, \boxed{25}, 30$

پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

واسطه حسابی دو عدد همان میانگین آنهاست. به عبارت دیگر: اگر a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، b را واسطه حسابی نامیده و داریم:

$$a + c = 2b \quad \text{یا} \quad b = \frac{a + c}{2}$$

۶ مسئله زیر در پایروس رابند آمده است. آن را حل کنید.

«۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.»

دنباله‌ی حسابی تشکیل شده را t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 در نظر می‌گیریم.

$$\left. \begin{aligned} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 100 &\Rightarrow 5a + 10d = 100 \xrightarrow{\div 5} a + 2d = 20 \\ \frac{1}{3}(t_3 + t_4 + t_5) = t_1 + t_2 &\xrightarrow{\times 3} 3a + 9d = 6a + 3d \Rightarrow a = 2d \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = 5, a = 10$$

دنباله: ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ۳۰



۱ از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

الف) $7, 28, 112, 448, \dots \rightarrow r = \frac{28}{7} = 4$ هندسی است و

ب) $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \dots \rightarrow r = -\frac{1}{2} \div 1 = -\frac{1}{2}$ هندسی است و

ب) $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$ هندسی نیست

ت) $5, 5, 5, 5, \dots \rightarrow r = \frac{5}{5} = 1$ هندسی است و

۲ چند دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{4}{5}$ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

فرض: $a_1 = 1 \Rightarrow 1, \frac{4}{5}, \frac{16}{25}, \dots$

فرض: $a_1 = -1 \Rightarrow -1, -\frac{4}{5}, -\frac{16}{25}, \dots$

با توجه به انتخاب جمله‌های اول دلخواه، بی‌شمار دنباله هندسی با قدر نسبت داده شده می‌توان نوشت

۳ درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.
الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

درست نیست، زیرا بی‌شمار دنباله می‌توان نام برد که نه حسابی و نه هندسی باشند، به عنوان نمونه دنباله مثلثی، مربعی، فیبوناتچی و ... یا دنباله‌های غیر معروف مثل: 2 و -4 و 6 و ...

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

درست نیست، دنباله‌هایی با اعداد ثابت ناصفر، در نظر بگیرید این دنباله‌ها حسابی با قدر نسبت صفر و هندسی با قدر نسبت یک می‌باشند. مانند: 2 و 2 و 2 و ..



۴ علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد. الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

کاهش ۲۰ درصدی قیمت به این معنی است که قیمت هر سال ۸۰ درصد سال قبل است.

بعد از سه سال	بعد از دو سال	بعد از یک سال
$500000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^3 = 256000$	$500000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^2$	$500000 \times \frac{80}{100}$

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

$$t_n = 500000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^n$$

۵ حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید. ۲, ۴, ۸,

$$2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{20} = 2^{(1+2+3+\dots+20)} = 2^{\frac{2 \times 21}{2}} = 2^{210}$$

حاصل ضرب n جمله نخست دنباله هندسی برابر است با:

$$P_n = a^n \times r^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \text{بنابراین}$$

$$\xrightarrow{a=r=2} P_{20} = 2^{20} \times 2^{\frac{2 \times 19}{2}} = 2^{20} \times 2^{19} = 2^{39}$$



۶ جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$r_3 = 12, \quad r_6 = 96 \Rightarrow r^{6-3} = \frac{r_6}{r_3} = \frac{96}{12} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$\xrightarrow{r=2} a \times 2^2 = 12 \Rightarrow a = 3$$

دنباله: ۳, ۶, ۱۲, ...

۷ بنابر آمار منتشر شده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۷۷۸ نفر در سال ۱۴۰۰ کاهش یافته است که نشان دهنده حدود ۳ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،

الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۵ چند نفر از هم‌وطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲	۱۴۰۳
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶/۷۷۸	۱۶/۲۷۴	۱۵/۷۸۶	۱۵/۳۱۲
			۱۴۰۴	۱۴۰۵
			۱۴/۸۵۳	۱۴/۴۰۷

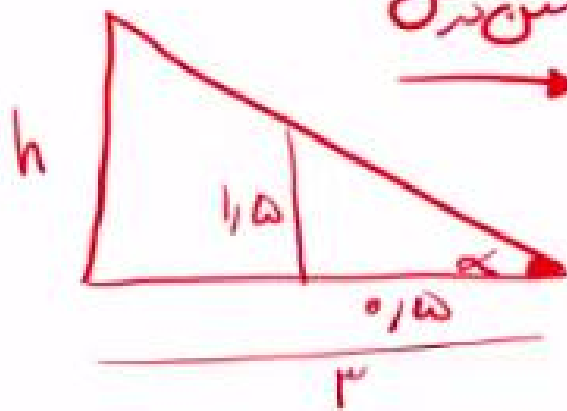
ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟
دنباله هندسی با قدر نسبت ۹۵٪



تمرین

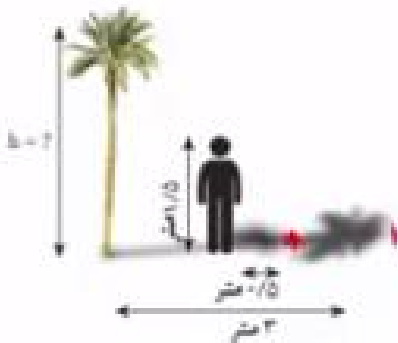
۱ علی می خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی ۱/۵ متر و طول سایه او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع درخت چقدر است؟

متن درخت

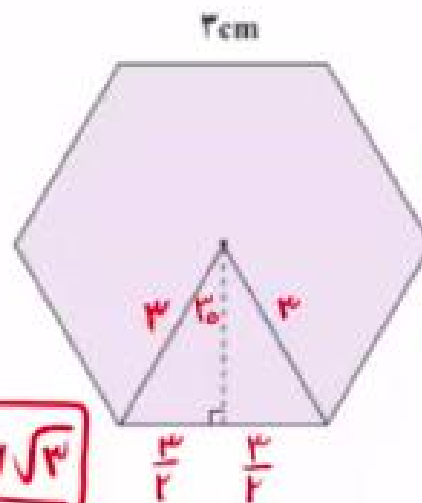
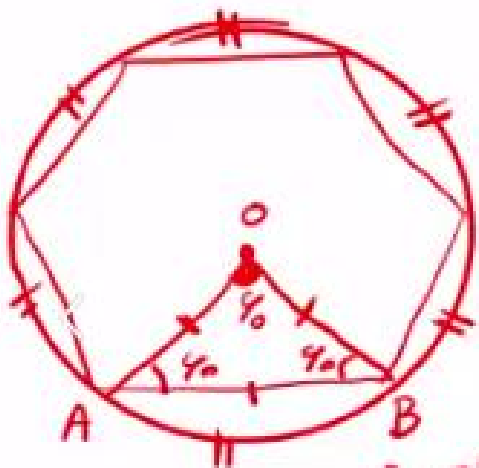


$$\tan \alpha = \frac{1,5}{0,5} = \frac{h}{3}$$

$$3 = \frac{h}{3} \rightarrow h = 9$$



۲ مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



$$S = \frac{1}{2} \times ۳ \times ۳ \times \sin ۱۲۰$$

$$= \frac{1}{2} \times ۹ \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$S = ۶ \times \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$



۲ یک هواپیما در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می‌آید.

$\tan 13^\circ = 0.23$

$\tan 13^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ $\rightarrow \frac{23}{100} = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{200}{23} = 8,70$

محل فرود

۱۳

۲km

مقابل

۱۳

x مجاور

۸ کیلومتر و ۷۰ متر

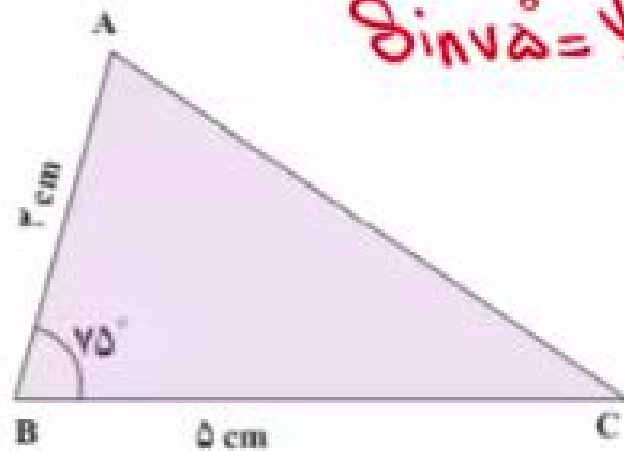
۳ فرض کنید $\sin 75^\circ = 0.96$ مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.

مساحت

$$S = \frac{1}{2} \times 15 \times 15 \times \sin 75^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 15 \times \frac{96}{100}$$

$$= \frac{720}{100} = 7,20 \text{ cm}^2$$



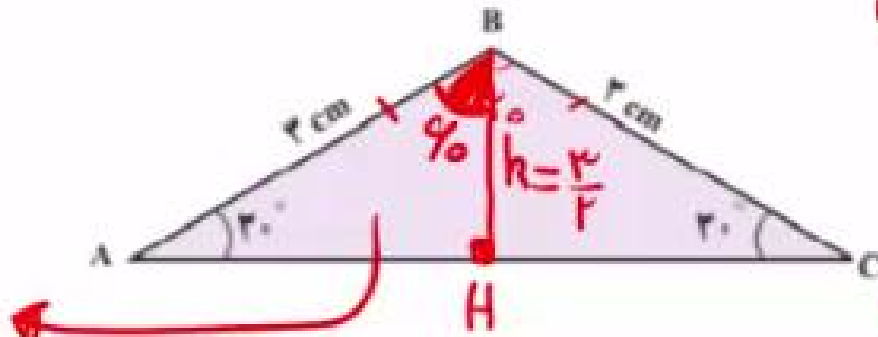
$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$



۳۰، ۴۵، ۶۰

۵ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.

۱۸۰ - ۹۰ = ۹۰



$$\sin 30^\circ = \frac{h}{r}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{r} \rightarrow h = \frac{r}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 18 \times \frac{r}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$S = 2 \times \frac{9\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 18 \times 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

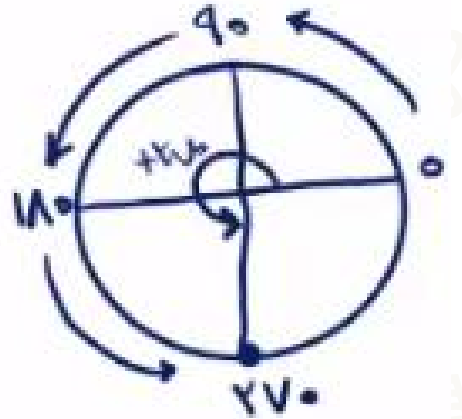
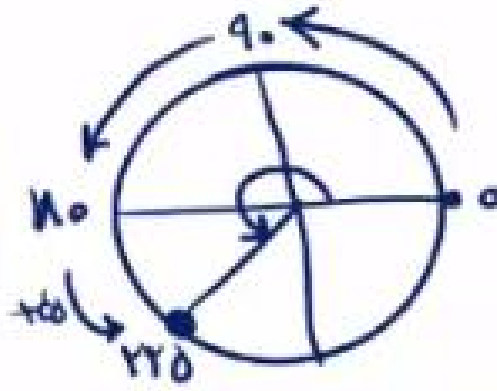
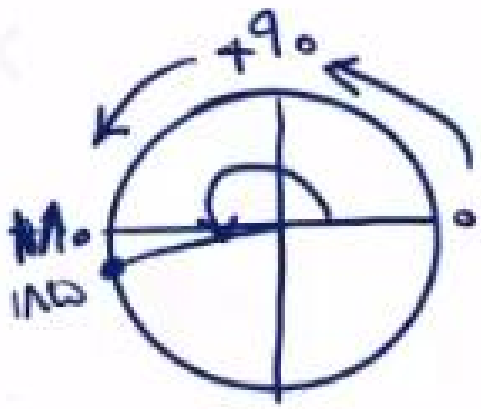
$$= \frac{9\sqrt{3}}{2}$$



تمرین

۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

الف) $+270^\circ$ ب) $+225^\circ$ پ) -135° ت) 180°



$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{r\alpha}{r\alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = ?$$

$$\sin \alpha = \frac{-r\sqrt{10}\alpha}{r\alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{-r\sqrt{10}}{r}$$

۲ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.



الف) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ (در ربع چهارم)

ب) $\sin \beta = \frac{-1}{2}$ (در ربع سوم)

دریافتی
 $\cos + \sin$
 $r^2 = x^2 + y^2$

$$(r\alpha)^2 = (r\alpha)^2 + y^2$$

$$r^2\alpha^2 - r^2\alpha^2 = y^2$$

$$-r\sqrt{10}\alpha = y$$

در ربع چهارم $\sin \alpha = \frac{-r\sqrt{10}}{r}$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$\frac{1}{4} + \cos^2 \beta = 1$$

$$\cos^2 \beta = \frac{3}{4}$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



۳ اگر $\sin\theta$ و $\tan\theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

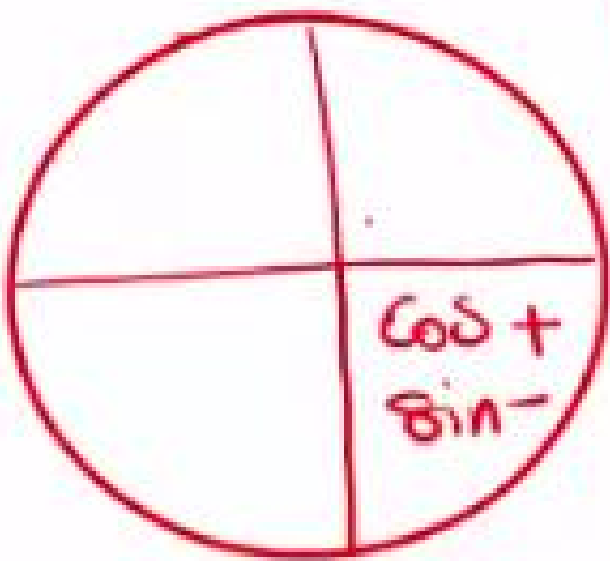


۴ حدود زاویه θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف) $\sin\theta > 0, \cos\theta > 0$ ب) $\sin\theta < 0, \cos\theta > 0$

ربع چهارم

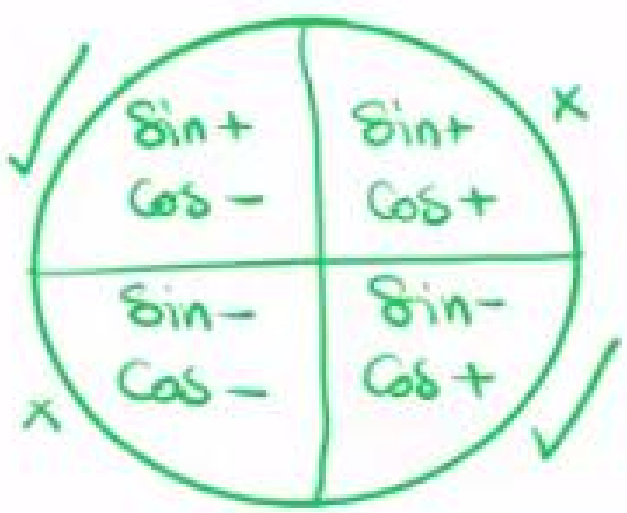
ربع اول





۵ اگر $\sin\alpha \times \cos\alpha < 0$ ، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می تواند قرار بگیرد؟

چرا؟
وقتی ضرب دو عدد است منفی است آن دو عبارت مختلف علامت هستند یعنی یکی + یکی -



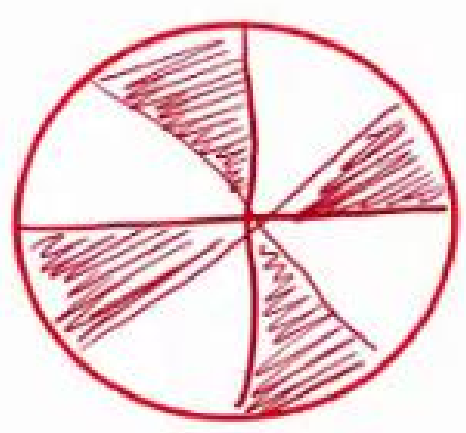
ربع دوم
ربع چهارم

$\tan \alpha > \cot \alpha \Rightarrow \alpha$ نقطه سفید

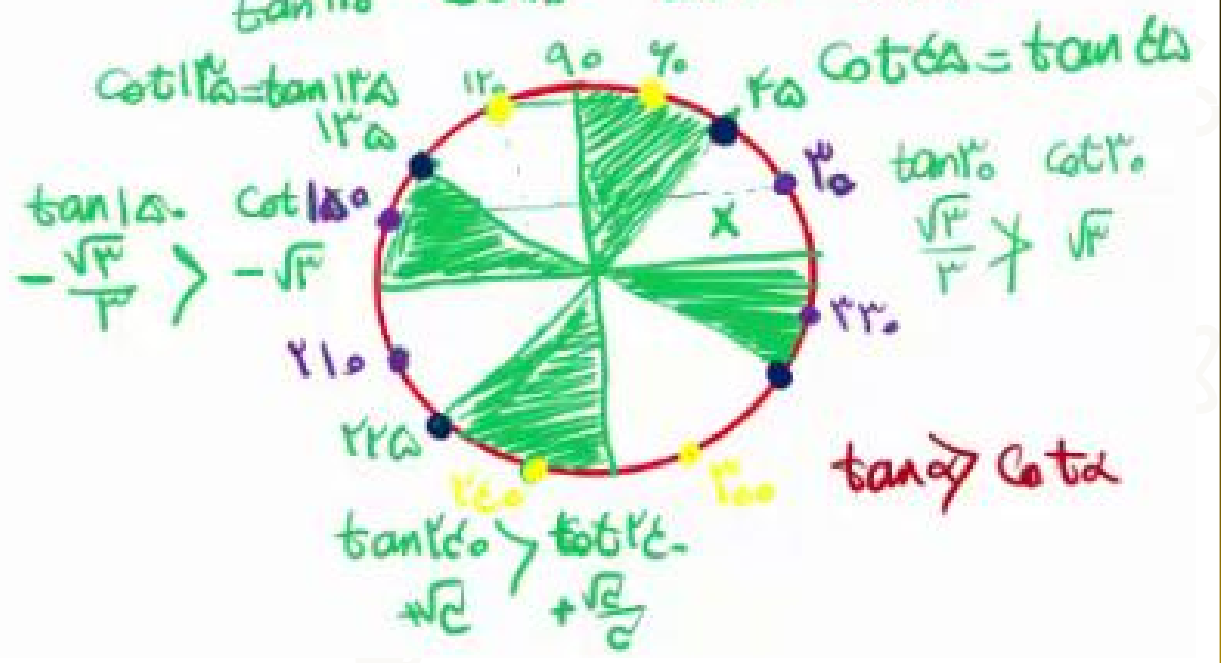
۶ زاویه ای مثل α پیدا کنید به طوری که $\tan \alpha > \cot \alpha$. اکنون زاویه ای مثل β پیدا کنید،

$\tan \alpha > \cot \alpha$
 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

به طوری که $\cot \beta > \tan \beta$. از این تریپل چه نتیجه ای می گیرید؟
 $\tan 110^\circ > \cot 110^\circ$
 $\cot 110^\circ > \tan 110^\circ$

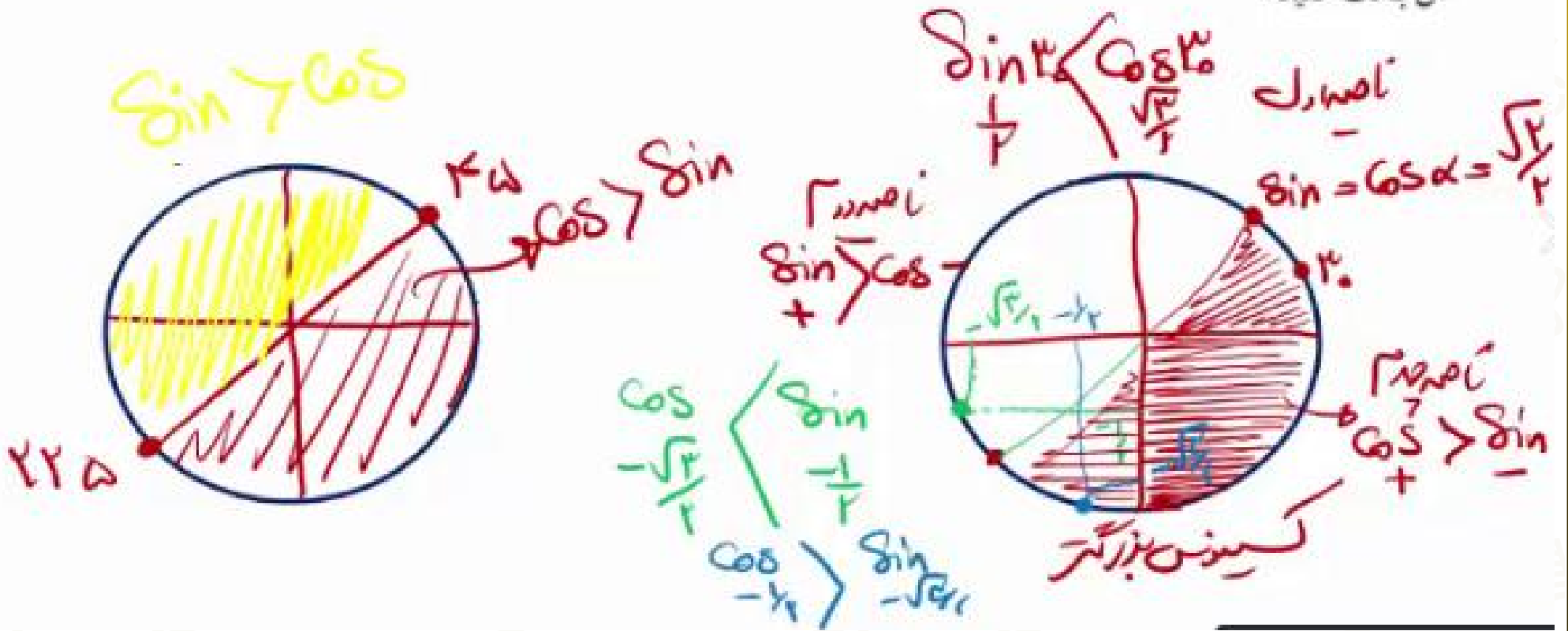


$\cot \alpha > \tan \alpha$





۷ در تمرین ۶ به جای تانژانت و کتانژانت به ترتیب سینوس و کسینوس قرار دهید و در مورد آن بحث کنید.



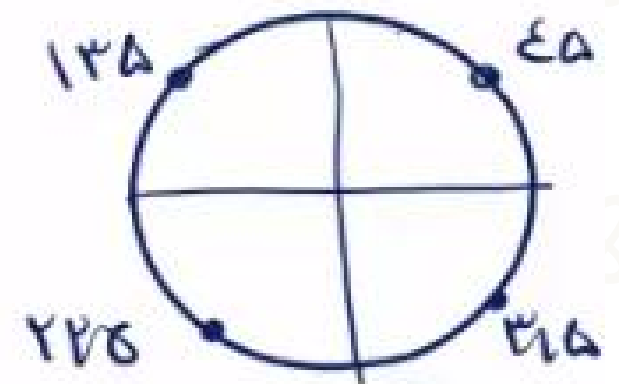
۱ معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور x ها 45° است و نقطه $(0, 2)$ روی آن قرار دارد.

$$m = \tan 45 = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 1(x - 0)$$

$$\boxed{y = x + 2}$$



$$\tan \alpha, \cot \alpha = \pm 1$$

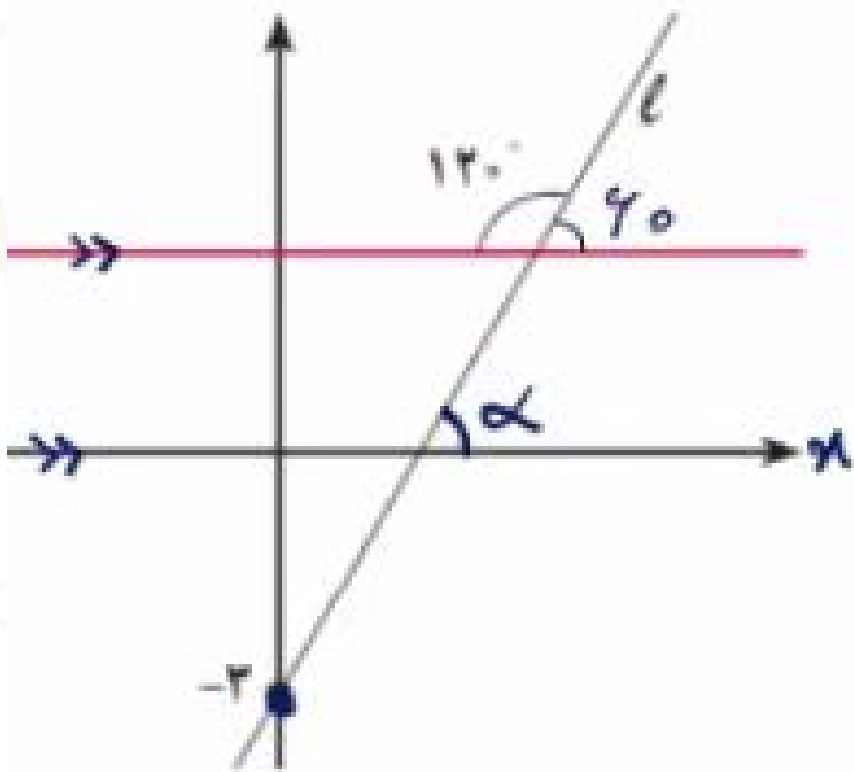


با توجه به شکل زیر، معادله خط l را به دست آورید.

عوض رسیده

$$(0, -3)$$

$$\alpha = 40^\circ \rightarrow m = \tan 40^\circ = \sqrt{3}$$



$$y = ax + b$$

$$y = \sqrt{3}x - 3$$



۱ فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\xrightarrow[\pi]{\text{میز}} \boxed{\sin \alpha = +\frac{4}{5}}$$

$$\frac{\sin +}{\cos - \checkmark}$$

$$\tan - \cot \alpha -$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{+\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = -\frac{3}{4}$$

۲ اگر $\tan \alpha = \frac{-4}{3}$ و α زاویه‌ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \xrightarrow[\pi]{\text{میز}} \boxed{\cos \alpha = +\frac{3}{5}}$$

$$\boxed{\cot \alpha = -\frac{3}{4}} \quad \text{Cos + Sin -}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$-\frac{4}{3} = \frac{\sin \alpha}{\frac{3}{5}}$$

$$\sin \alpha = \frac{-4}{3} \times \frac{3}{5} = \boxed{-\frac{4}{5}}$$



۳ اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 135° را به دست آورید.

$$\sin^2 135^\circ + \cos^2 135^\circ = 1$$

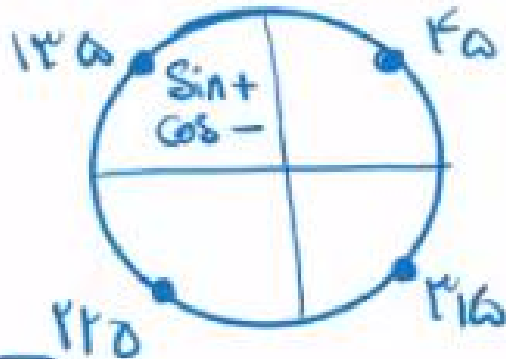
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2 135^\circ = 1$$

$$\frac{2}{4} + \cos^2 135^\circ = 1$$

$$\cos^2 135^\circ = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4} \xrightarrow{\text{میز}} \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

$$\boxed{\tan 135^\circ = -1}$$



$$\cot 135^\circ = \frac{1}{\tan 135^\circ} = -1$$

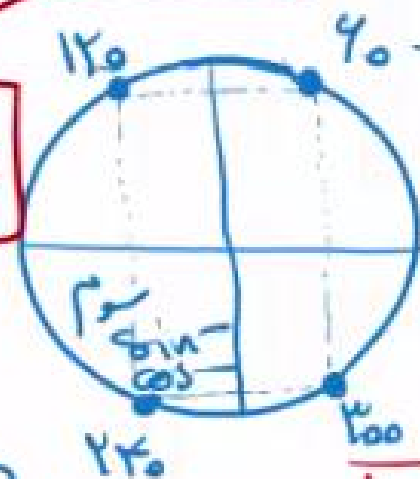
۴ اگر $\tan 240^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 240° را به دست آورید.

$$1 + \tan^2 240^\circ = \frac{1}{\cos^2 240^\circ}$$

$$1 + 3 = \frac{1}{\cos^2 240^\circ}$$

$$\xrightarrow{\text{برگزین}} \frac{1}{4} = \cos^2 240^\circ \xrightarrow{\text{میز}} \frac{-1}{2} = \cos 240^\circ$$

$$\boxed{\cot 240^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$



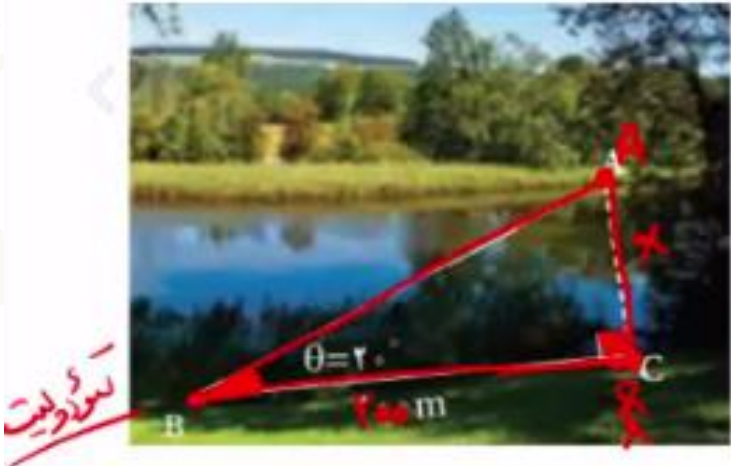
$$\tan 240^\circ = \frac{\sin 240^\circ}{\cos 240^\circ}$$

$$\sqrt{3} = \frac{\sin 240^\circ}{-1/2}$$

$$\boxed{\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



۵ شخصی می خواهد عرض یک رودخانه را اندازه گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه ای چون C و سپس نقطه ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می کند و به اندازه ۲۰۰ متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می کند تا به نقطه B برسد. اگر زاویه دید این شخص (از نقطه B به نقطه A)، 20° باشد و $\sin 20^\circ = 0.34$ ، او چگونه می تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار بر حسب متر بنویسید.)



$$\sin 20^\circ = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 40000}} = \frac{17}{50}$$

$$\frac{x^2}{x^2 + 40000} = \frac{289}{2500} \rightarrow 2500x^2 = 289x^2 + 11540000$$

$$2211x^2 = 11540000 \rightarrow x^2 = 5218,60 \rightarrow x = \sqrt{5218,60}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

۶ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{با فرض } \cos \theta = 0$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \times \frac{\cos \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta$$

$$= \frac{1 - \sin^2 \theta}{(1 + \sin \theta) \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta) \cos \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} \quad \checkmark$$



$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x \quad (\text{ن})$$

طرف ص ۱

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$$

$$= 1 - \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x}$$

$$= 1 - \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x}$$

$$\Rightarrow 1 - 1 + \sin x = \sin x \quad \checkmark$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha \quad (\text{پ})$$

طرف ص ۲

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} =$$

$$= \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \frac{1}{\tan \alpha}}$$

$$= \frac{1 + \tan \alpha}{\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha}}$$

$$= \frac{\tan \alpha (1 + \tan \alpha)}{\tan \alpha + 1} = \tan \alpha \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \quad (\text{ن})$$

طرف ص ۳

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \tan \alpha$$

$$= \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{(1 - \sin \alpha) \cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{(1 - \sin \alpha) \cos \alpha}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}$$

$$= \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \quad \checkmark$$



تمرین

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$$\sqrt{14} < \sqrt{16} < \sqrt{25}$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{9} < \sqrt{16} < \sqrt{25}$$

$$\sqrt{1} < \sqrt{16} < \sqrt{25}$$

$$\sqrt{-1} < \sqrt{16} < \sqrt{25}$$

$$-2 < \sqrt{16} < -1$$

$$3 < \sqrt{10} < 4$$

$$\sqrt{-27} < \sqrt{10} < \sqrt{-8}$$

$$-3 < \sqrt{10} < -2$$

$$\sqrt{144} < \sqrt{10} < \sqrt{169}$$

$$9 < \sqrt{10} < 10$$

$$\sqrt{400} = \sqrt{2^4 \times 5^2} = \sqrt{2 \times 10} < 5$$

$$\sqrt{400} < \sqrt{409} < \sqrt{418}$$

$$3 < \sqrt{400} < 4$$

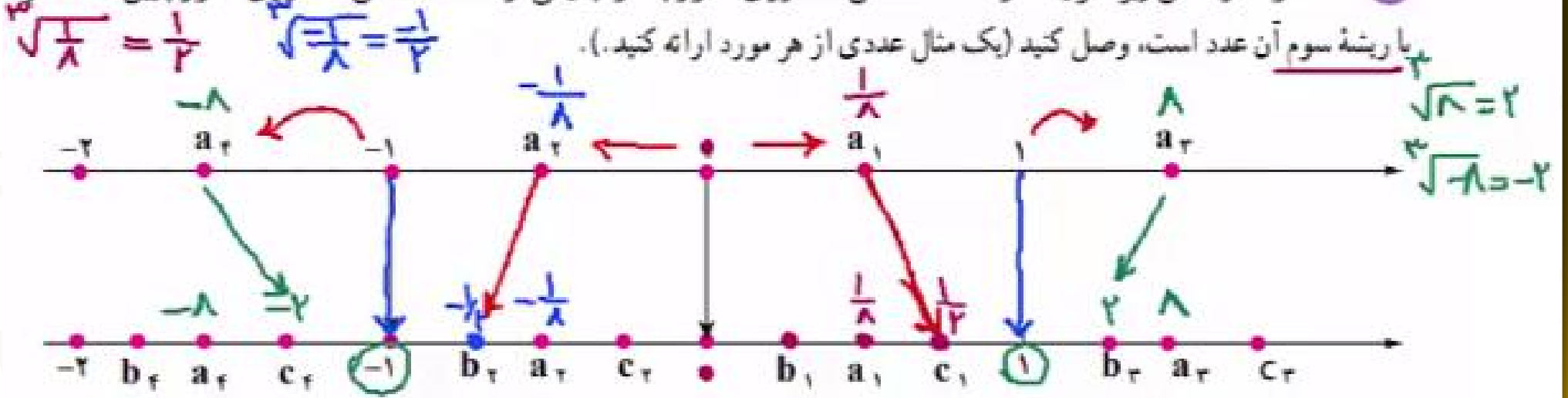
$$\sqrt{4} = 2$$

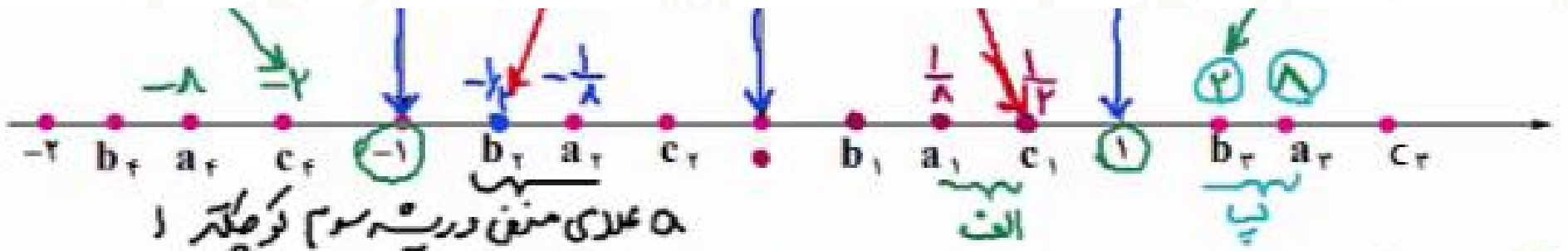
$$4 < \sqrt{20} < 5$$

$3 < \sqrt{10} < 4$ $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$	$(3, 1)^2 = 9, 1$ $(3, 2)^2 = 10, 4$ ✓	$(1, 8)^2 = 5, 84$ $(1, 9)^2 = 6, 81$	$(1, 5)^5 = 7, 59$ $(1, 6)^5 = 14, 19$ $(1, 7)^5 = 16, 80$	$2 < \sqrt{44} < 3$ $(2, 4)^5 = 79, 42$ $(2, 3)^5 = 67, 34$
$\sqrt{10} \approx 3, 2$	$\sqrt{10} \approx 3, 2$	$\sqrt{10} \approx 3, 2$	$\sqrt{16} \approx 1, 7$	$\sqrt{44} \approx 2, 3$

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از نقاط مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).





الف) $a < \sqrt{a}$ چه عددی می تواند باشد؟

ب) $a = \sqrt{a}$ چه عددی می تواند باشد؟

$$0 < a < 1$$

ب) $a = \sqrt{a}$ چه عددی می تواند باشد؟ $a = 0$ یا $a = 1$

ب) $a > \sqrt{a}$ چه عددی می تواند باشد؟ $a > 1$

ت) به موارد (الف) و (ب) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

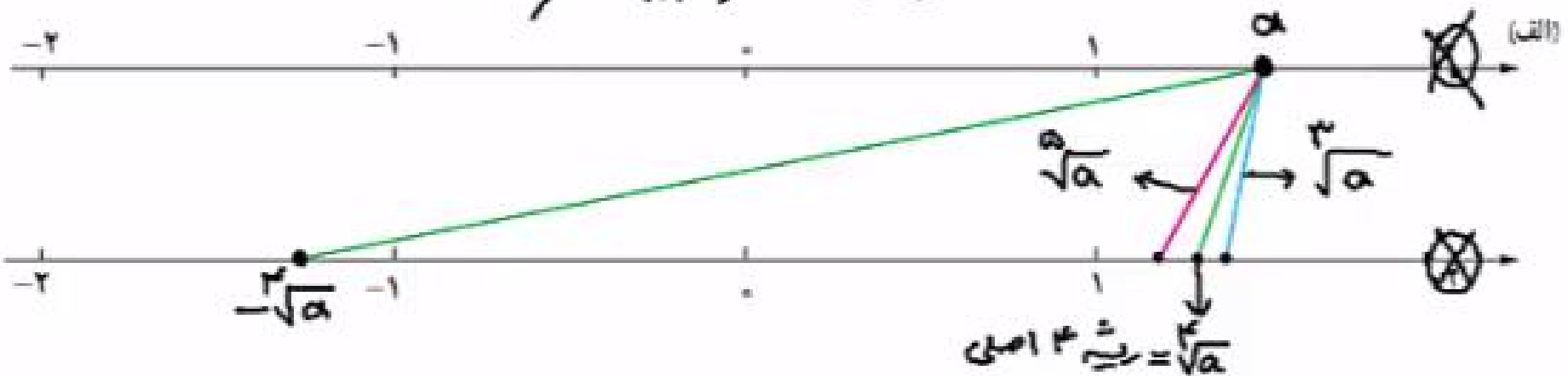
$$1 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$$

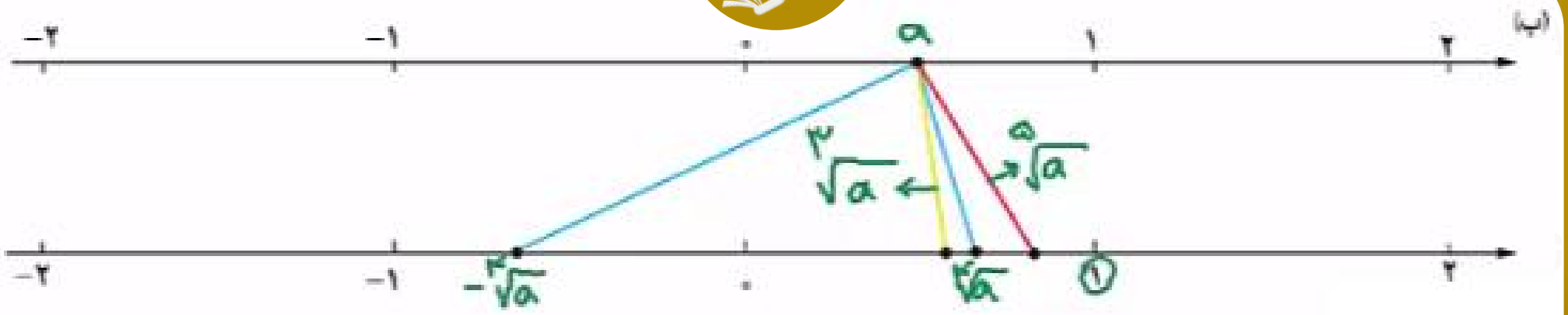
تمام اعداد بعد از 1 در مورد ریشه سوم و پنجم رفتار مشابه دارند

در هر یک از شکل های زیر، نقطه ای از محور بالا به ریشه های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ

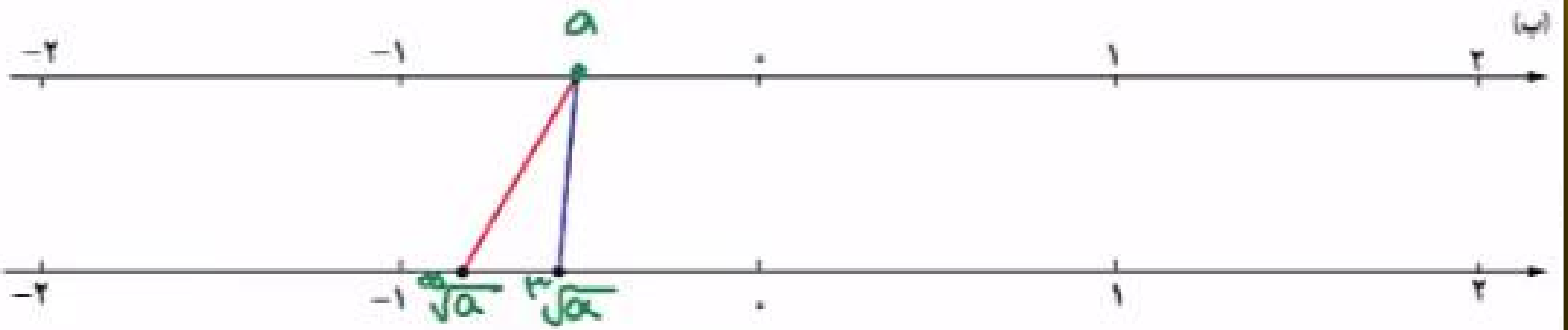
$$(15)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(15)^5} > \sqrt[5]{(15)^5} = (15)$$

مربوط به کدام ریشه است.





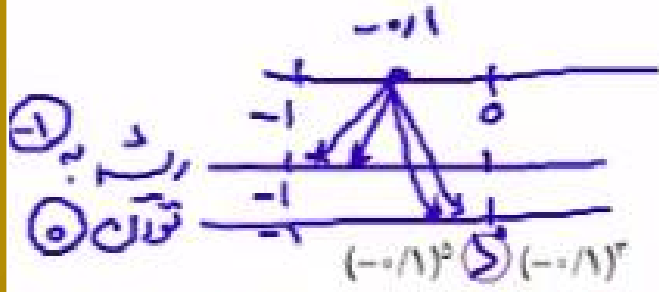
$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} < \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$



جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۲ و ۳ ... ریشه‌های چهارم عدد ... ۸۱ ... می‌باشند.

ب) اگر $\sqrt[4]{64} = a$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^2 + 5$ برابر است با ... ۱۳ ...
 $a = 2$ \rightarrow ریشه اصلی چهارم \rightarrow $2^2 + 5 = 9$



در جاهای خالی یکی از علامت‌های «>»، «<» یا «=» را قرار دهید.

$$(-1)^3 < (-1)^2$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1$$



$$-32 = (-2)^5 < (-2)^4 = +16$$

$$\left(-\frac{1}{10}\right)^5 = \frac{-1}{100000} > \left(-\frac{1}{10}\right)^6 = \frac{-1}{100000}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^5 = \frac{1}{100000} < \left(\frac{1}{10}\right)^6 = \frac{1}{100000}$$



تمرین

درستی رابطه $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ را با مقادیر مختلف به m, k و a بررسی کنید (اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد).

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ m &= 4 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

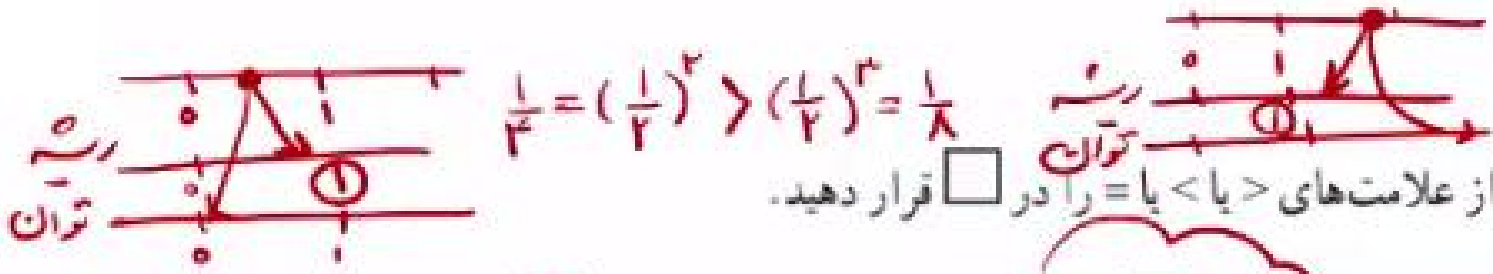
$$\left. \begin{aligned} \sqrt[k]{a^m} &= \sqrt[2]{2^4} = \sqrt{16} = 4 \\ (\sqrt[k]{a})^m &= (\sqrt{2})^4 = 4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &= 2 \\ m &= 4 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{a^m} &= \sqrt[2]{(-2)^4} = \sqrt{16} = 4 \\ (\sqrt[k]{a})^m &= (\sqrt{-2})^4 = (-\sqrt{2})^4 \\ &= +(\underbrace{(\sqrt{2})^4}_2) = 4 \end{aligned}$$





تمرین



الف) یکی از علامت‌های < یا > یا = را در □ قرار دهید.

$(-0/5)^4 \square (0/5)^4$ $\sqrt{-1/5} \square \sqrt[3]{-1/5}$ $4^2 \square \frac{4^2}{2}$ $\sqrt{4} \square \sqrt[3]{4}$

توان کوچکتر *بزرگتر* *عنان ب* *بیشتر*

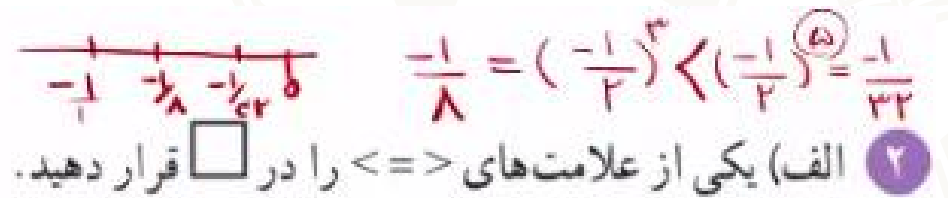
ب) وقتی $0 < a < 1$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در □ قرار دهید.

$a^4 \square a^2$ $\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$

توان کوچکتر *بیشتر بزرگتر*

ب) وقتی $a > 1$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در □ قرار دهید.

$a^4 \square a^2$ $\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$



الف) یکی از علامت‌های < = > را در □ قرار دهید.

عددی توان زوج +

$(-0/5)^2 \square (-0/5)^3$ $(-2)^4 \square (-2)^5$

عددی توان فرد -

$(-0/5)^2 \square (-0/5)^3$

$(-0/5)^4 \square (-0/5)^5$

$-8 = (-2)^3 \square (-2)^5 = -32$

$+16 = (-2)^4 \square (-2)^6 = +64$

$(0/5)^2 \square (-0/5)^2$

$(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$ $(-\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$

توان مثبت } توان بزرگتر
عددی کوچکتر





۳ با توجه به تعریف ریشه (اگر $\sqrt[n]{a} = b$ آنگاه $b^n = a$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به شرط با معنا بودن رادیکال) رابطه زیر برقرار است:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(\sqrt[n]{b^n}\right)^n = (b)^n = b^n = a$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

۴ آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۳، ۴ یا ۵ بگیرید و به جای a و b مقادیرهای عددی بدهید.

$n=3 \rightarrow \sqrt[3]{8+27} = \sqrt[3]{35}$ عددی بین ۳ و ۴

$$\sqrt[3]{8+27} \neq \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 2+3=5$$

$$\sqrt[3]{27} \leq \sqrt[3]{35} \leq \sqrt[3]{64}$$

$n=4 \rightarrow \sqrt[4]{81+625} = \sqrt[4]{706}$ عددی بین ۴ و ۵

$$\sqrt[4]{81+625} \neq \sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{625} = 3+5=8$$

$$\sqrt[4]{625} \leq \sqrt[4]{706} \leq \sqrt[4]{64}$$

$n=5 \rightarrow \sqrt[5]{32+243} = \sqrt[5]{275}$ عددی بین ۳ و ۴

$$\sqrt[5]{32+243} \neq \sqrt[5]{32} + \sqrt[5]{243} = 2+3=5$$

۵ عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \rightarrow \sqrt[3]{5^{-3}} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt[5]{2^{-5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^5}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{3^{-3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^5} = \frac{1}{5}$$



۶ به جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به طوری که :

الف $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{2}{3}$ ✓
 $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد.

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد. n زوج

ب) $\sqrt[2]{\frac{-4}{-9}} = \sqrt[2]{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$
 $\frac{\sqrt[2]{-4}}{\sqrt[2]{-9}} = \text{وجود ندارد}$

~~$\sqrt{\frac{-1}{+2}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{+2}}$~~
 $x = -2$ جواب = 2



تمرین

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

۱ هر یک از توان های کسری زیر را به صورت رادیکال نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به دست آورید.

$$16^{1/2} = \sqrt{16} = 4$$

$$5^{1/2} = \sqrt{5}$$

$$4^{2/5} = (2^2)^{2/5} = 2^{4/5} = \sqrt[5]{2^4}$$

$$3^{1/3} \times 3^{2/3} = 3^{1/3+2/3} = 3^1 = 3$$

$$(4^2)^{1/3} = (2^4)^{1/3} = \sqrt[3]{2^4}$$

$$4^{2/3} = (2^2)^{2/3} = 2^{4/3} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$22^{-1/5} = (2^5)^{-1/5} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$22^{2/5} = (2^5)^{2/5} = 2^2 = 4 \quad 125^{-2/3} = (5^3)^{-2/3} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

۲ می دانیم

$$\sqrt[n]{a^{1/n}} = a^{1/n^2} = a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^{1/n}} = (a^{1/n})^{1/n} = a^{1/n^2} = a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

آیا تساوی $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ همواره برقرار است ($a > 0$)؟ n, m, k طبیعی اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{2}$ و $\sqrt[4]{2^2}$ و $\sqrt[6]{2^3}$ برابرند.

$$\sqrt[4]{2^2} = 2^{2/4} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[kn]{a^{km}} = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[6]{2^3} = 2^{3/6} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

۳ فرض کنیم $a=64$ ، $r=1/4$ و $s=1/3$ مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ را محاسبه و با هم مقایسه کنید. a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a ، r و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

$$a^r \div a^s = a^{r-s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{(3^6)^{1/4}}{(3^6)^{1/3}} = (3^6)^{1/4-1/3} = (3^6)^{1/12} = 3$$

$$\frac{64^{1/4}}{64^{1/3}} = \frac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$64^{1/4-1/3} = 64^{1/12} = \sqrt[12]{64} = \sqrt[3]{2^4} = 2$$

$$a=3^6 \quad r=1/4 \quad s=1/3$$

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{(3^6)^{1/4}}{(3^6)^{1/3}} = \sqrt[4]{3^6} \div \sqrt[3]{3^6} = \frac{3^3}{3^2} = \frac{27}{9} = 3$$



۴ حساب کنید.

$$\sqrt[2]{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[4]{64} = 2$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[9]{81}} = \sqrt[18]{81} = \sqrt[9]{9} = 3$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[4]{81}} = \sqrt[8]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{5}} = \sqrt[6]{\sqrt[2]{5^2}} = \sqrt[6]{5} = \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{2}} = \sqrt[6]{\sqrt[2]{2^2}} = \sqrt[6]{2} = \sqrt[3]{2}$$



تمرین

$$x-y = (\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y})$$

هر یک از عبارات های زیر را تا حد ممکن (به عبارات های گویا) تجزیه کنید.

الف) $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x+y)(x-y) \checkmark$

ب) $x^6 - y^6 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2 + xy)$

ب) $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2 - xy)$

ت) $16a^4 + 25 = (4a+5)(4a^2 + 9 - 20a)$

$a^4 b^6 - 1 = (ab^2 - 1)(a^2 b^3 + 1 + 2ab^2)$

الف) $\frac{3}{3+\sqrt{5}} \times \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{3(3-\sqrt{5})}{9-5}$

مخرج کسرها را گویا کنید.

ب) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

الف) $\frac{3}{3+\sqrt{5}}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{x}-2} \times \frac{\sqrt{x^2+4}+2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+4}+2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x^2+4}+2\sqrt{x}}{x-4}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}$

ت) $\frac{6}{2\sqrt{2}-1} \times \frac{(2\sqrt{2})^2+1+(2\sqrt{2})}{(2\sqrt{2})^2+1+(2\sqrt{2})} = \frac{6}{14-1}$

ت) $\frac{6}{2\sqrt{2}-1}$

$(2\sqrt{2})^2 = 8 \times 2 = 16$



$$\begin{array}{r} \times 0000000001 \\ 200000 \\ \hline 999800001 \end{array}$$

ت) 105^2

ب) 9999^2

ب) 105^2

با استفاده از اتحادها، حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $16 \times 14 = (15+1)(15-1) = 15^2 - 1 = 224$

$17^2 = 289$

$(10)^2 = 100$

$18^2 = 324$

$11^2 = 121$

$19^2 = 361$

$12^2 = 144$

$20^2 = 400$

$13^2 = 169$

$14^2 = 196$

$15^2 = 225$

$16^2 = 256$

الف) $14 \times 16 = (15+1)(15-1) = 15^2 - 1 = 225 - 1 = 224$

ب) $(105)^2 = (100+5)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 5 + 5^2 = 11025$

ب) $(9999)^2 = (10000-1)^2 = 10000^2 + 1 - 20000 = 999800001$

ت) $(105)^3 = (100+5)^3 = 100^3 + 125 + 3 \times 100 \times 5 \times 105$
 $= 1000000 + 125 + 1500 \times 105 = 1057625$

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1}$$

الف) $\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1}$

$$\frac{1(\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}-1) - 5x}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1-5x}{x-1}$$

① $\frac{1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{x-1}$

ب) $\frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}} - \frac{1}{x-1}$
 $\frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x} - 1}{x-1} - \frac{1}{x-1}$

② $\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x})}$



۵ اگر $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4} = 3$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}$ را به دست آورید.

$$(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}) (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}) = (x+2) - (x-4)$$

$$3 \times (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}) = 4$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4} = \frac{4}{3}$$



۱) معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

$$1) x^2 - 11x = -10$$

$$x^2 - 11x + 10 = 0$$

$$(x - 10)(x - 1) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

$$x - 10 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = +10}$$

$$\boxed{x = +1}$$

$$2) 5a^2 - 7a = 2a(a - 2)$$

$$5a^2 - 7a = 2a^2 - 4a$$

$$3a^2 - a = 0$$

$$a(3a - 1) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{a = 0}$$

$$3a - 1 = 0$$

$$\boxed{a = \frac{+1}{3}}$$

$$2) 5t^2 = 20$$

$$5t^2 - 20 = 0$$

$$5(t^2 - 4) = 0$$

$$5(t - 2)(t + 2) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

$$t - 2 = 0$$

$$t + 2 = 0$$

$$\boxed{t = +2}$$

$$\boxed{t = -2}$$

$$3) 4k^2 - 12k + 8 = 0$$

$$\div 4$$

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$(k - 2)(k - 1) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

$$k - 2 = 0$$

$$k - 1 = 0$$

$$\boxed{k = +2}$$

$$\boxed{k = +1}$$



۲) هر یک از معادله‌های زیر را با ریشه دوم گرفتن حل کنید.

$$1) n^2 - 2 = 26$$

$$n^2 = 28$$

ریشه دوم
 $\rightarrow n = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$$n = -\sqrt{28} = -2\sqrt{7}$$

$$2) x^2 + 12 = 3$$

$$x^2 = -9$$

ریشه دوم
 معادله‌ای که ریشه دوم ندارد

پس معادله دوم فوق ریشه حقیقی ندارد.

$$3) (3t-2)^2 = 4$$

ریشه دوم
 $\rightarrow 3t - 2 = 2 \rightarrow 3t = 4$
 $t = \frac{4}{3}$

$\rightarrow 3t - 2 = -2 \rightarrow 3t = 0$
 $t = 0$

$$4) 2 - 2k = 2k(2k-1)$$

$$2 - 2k = 4k^2 - 2k$$

$$2 = 4k^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) = k^2 \rightarrow \begin{cases} k = +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ k = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

گویا بزن
 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$$\Delta = 9 - 4(1)(3) = 9 - 12 < 0$$

معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱) $x^2 - 6x = 7$

$$(x^2 - 6x + 9) = 7 + 9$$

$$(x - 3)^2 = 14$$

ریشه‌ها

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3 = \sqrt{14} \rightarrow x = 3 + \sqrt{14} \\ x - 3 = -\sqrt{14} \rightarrow x = 3 - \sqrt{14} \end{array} \right.$$

۲) $s^2 - 3s + 3 = 0$

$$(s^2 - 3s + \frac{9}{4}) - \frac{9}{4} + 3 = 0$$

$$(s - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} - 3$$

$$(s - \frac{3}{2})^2 = \frac{-3}{2}$$

ریشه‌ها ندارند یعنی معادله فوق را ریشه حقیقی ندارد

۳) $r^2 + 4r + 4 = 0$

$$(r + 2)^2 = 0$$

$(r + 2)(r + 2)$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $r = -2 \quad r = -2$

$$r + 2 = 0$$

$$\boxed{r = -2}$$

ریشه مضاعف

۴) $2a^2 + 5a - 3 = 0$

$$\div 2 \rightarrow a^2 + \frac{5}{2}a - \frac{3}{2} = 0$$

$$(a^2 + \frac{5}{2}a + \frac{25}{16}) - \frac{25}{16} - \frac{3}{2} = 0$$

$$(a + \frac{5}{4})^2 = \frac{25}{16} + \frac{3 \times 8}{2 \times 16} = \frac{49}{16}$$

ریشه‌ها

$$\left\{ \begin{array}{l} a + \frac{5}{4} = +\frac{7}{4} \rightarrow a = \frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{2}{4} \\ a + \frac{5}{4} = -\frac{7}{4} \rightarrow a = -\frac{7}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{12}{4} \end{array} \right.$$



هر یک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

$$1) \widehat{a}x^2 - \widehat{b}x + \widehat{c} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 149 - 4(4)(3) = 133$$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{13 + \sqrt{133}}{8} \\ x &= \frac{13 - \sqrt{133}}{8} \end{aligned} \right.$$

$$2) a^2 + 2\sqrt{3}a = 9$$

$$a^2 + 2\sqrt{3}a - 9 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-9) = 12 + 36 = 48 \xrightarrow{14 \times 3} 4\sqrt{3}$$

$$\left\{ \begin{aligned} a &= \frac{-2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ a &= \frac{-2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{2} = \frac{-6\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3} \end{aligned} \right.$$

$$2) r - r^2 = 3$$

$$r - r^2 - 3 = 0$$

$$-r^2 + r - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-1)(-3) = 1 - 12$$

$$\Delta = -11 < 0$$

ریشه حقیقی ندارد

$$2) \frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= -3 \\ c &= -9 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\times 6} 2t^2 - 3t - 9 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(2)(-9) = 9 + 72 = 81 \xrightarrow{14 \times 3} 9$$

$$t = \frac{3 + 9}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$t = \frac{3 - 9}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$



۵) هر یک از معادله های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

۱) $2x^2 = 250$

$\div 2 \rightarrow x^2 = 125 = 25 \times 5$

$x = + 5\sqrt{5}$

$x = - 5\sqrt{5}$

۲) $2a^2 + 2a = 1$

$2a^2 - 2a - 1 = 0$

جمع ضرایب منفرجه

$\begin{cases} a = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Delta = 9 - 4(2)(-1) = 9 + 8 = 17 \rightarrow 5$

$a = \frac{+2 + 5}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$

$a = \frac{+2 - 5}{2} = \frac{-3}{2} = -1.5$

مقدار

$a + 2$ نزدیک

$a^2 + (a+2)^2 = 29$

$a^2 + a^2 + 4 + 4a - 29 = 0$

$2a^2 + 4a - 25 = 0$

$a^2 + 2a - 12.5 = 0$

$\Delta = (2)^2 - 4(1)(-12.5) = 4 + 50 = 54 \rightarrow 7.35$

۲) $z^2 - 6z + 9 = 0$

$z^2 - 6z + 9 = 0$

$(z-3)^2 = 0$

$z - 3 = 0$

$z = +3$

۳) $1b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 2 - 4(1)(-\sqrt{2}) = 2 + 4\sqrt{2} = 2(1 + 2\sqrt{2})$

$b = \frac{-\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$b = \frac{-\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{-3\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۶) مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

۱۱ و ۱۳

$a = \frac{-2 + 24}{2} = \frac{22}{2} = 11$

$a = \frac{-2 - 24}{2} = \frac{-26}{2} = -13$

-۱۳ و ۱۱



۷ طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.



$$S = 4a$$

$$S = a(4a + 3) = 45$$

$$4a^2 + 3a - 45 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(4)(-45) = 9 + 720 = 729 \xrightarrow{\sqrt{729}} 27$$

$$\begin{cases} a = \frac{-3 + 27}{8} = \frac{24}{8} = 3 \\ a = \frac{-3 - 27}{8} = \frac{-30}{8} \times \end{cases}$$



$$\text{عرض} = a = 3$$

$$\text{طول} = 4a + 3 = 15$$

۸ اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

$$(x + 4)(x + 8) = 60$$

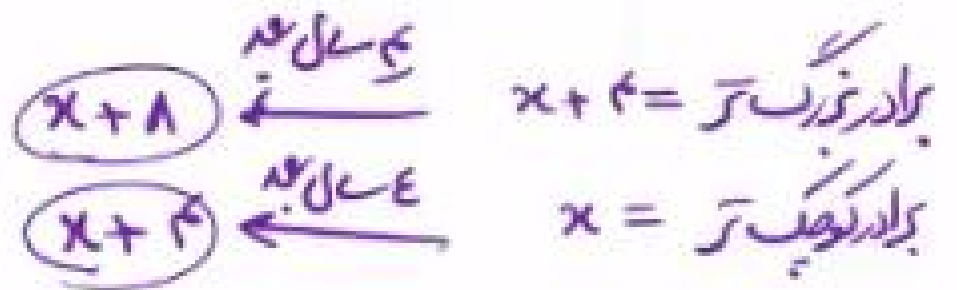
$$x^2 + 4x + 8x + 32 = 60$$

$$x^2 + 12x - 28 = 0$$

$$(x + 14)(x - 2) = 0$$

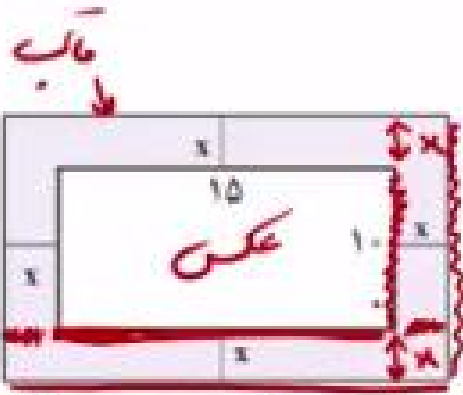
$$x = -14$$

$$\boxed{x = 2} \xrightarrow{\text{سن برادر کوچکتر}} \boxed{x + 4 = 6} \xrightarrow{\text{سن برادر بزرگتر}}$$





۱ یک عکس به اندازه ۱۰ در ۱۵ سانتی متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله همه لبه های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید



عرض قاب = $10 + 2x$

$10 + 2x = 15$
 $15 + 2x = 20$

$S = 300 \rightarrow (15 + 2x)(10 + 2x) = 300$

طول قاب = $15 + 2x$

$\rightarrow 150 + 30x + 20x + 4x^2 - 300$

$\rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0$

$2x^2 + 25x - 75 = 0$

$\Delta = (25)^2 - 4(2)(-75)$
 $625 + 600 = 1225 \rightarrow 35$

$x = \frac{-25 + 35}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2,5$

$x = \frac{-25 - 35}{4} = -x$

تعداد تیم ها = n
 هر تیم با $(n-1)$ تیم دیگر بازی کند

۱ در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۲۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم های این تیمگان را به دست آورید. اگر تعداد بازی های تیمگان N و تعداد تیم ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی ها به دست آورید.

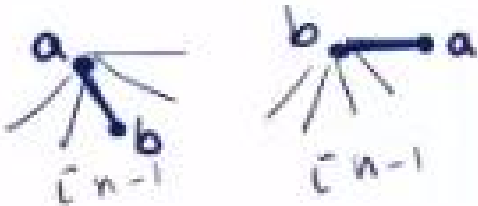
$\frac{n(n-1)}{2} = 25 \xrightarrow{\times 2} n^2 - n = 90$ $N = \frac{n(n-1)}{2}$

$n^2 - n - 90 = 0$

$(n-10)(n+9) = 0$

\downarrow
 $n = 10$

\downarrow
 $n = -9$
 \times





$$\frac{2}{1} \times 1000$$

۱۱ فشار خون نرمال یک شخص مذکر، که بر حسب میلی متر جیوه (mmHg) اندازه گیری می شود، با رابطه $P = 0.1004s^2 - 0.102s + 120$ محاسبه می شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی متر جیوه باشد.

۱۲۵ →

$$P = 0.1004s^2 - 0.102s + 120 \quad (\text{از مائین حساب استفاده کنید.})$$

$$0.1004s^2 - 0.102s - 5 = 0 \quad \xrightarrow{\times 1000} \quad 4s^2 - 20s - 5000 = 0$$

$$\Delta = 400 - 4(4)(-5000) = 400 + 120000 = 120400 \quad \xrightarrow{\sqrt{\text{سردوم}}} \quad 347$$

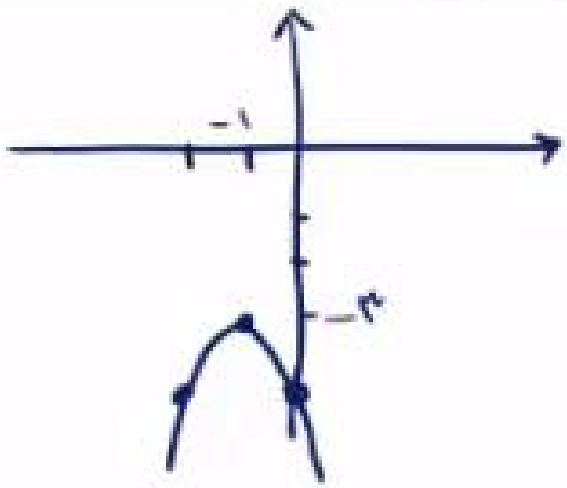
$$s = \frac{20 + 347}{2} \approx 183.5$$

$$P = 125 \quad \leftarrow \quad s = 27$$

$$s = \frac{20 - 347}{2} = \text{منفی}$$

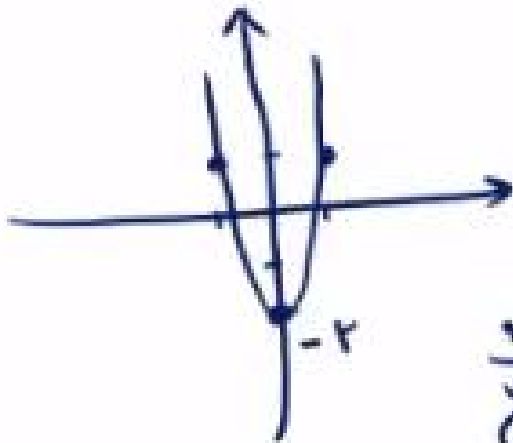


تمرین



x	-2	-1	0
y	-3	-3	-3

نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.
 الف) $y = -(x+1)^2 - 3$ ← سهمی رو به پایین
 رأس (-1, -3)

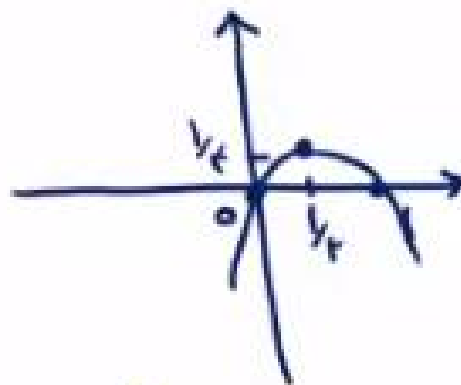


x	-1	0	1
y	1	-2	1

ب) $y = x^2 - 2$
 رأس (0, -2)

$y = -x^2 + x$

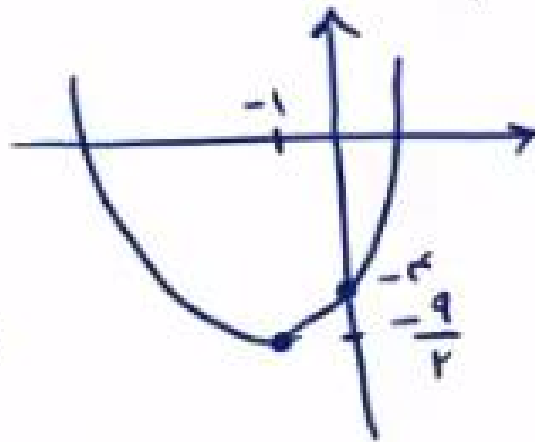
حل: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$
 $y = -(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$



ب) $y = x - x^2$
 $x - x^2 = 0$
 $x(1-x) = 0$
 $x=0$ $x=1$

$y = \frac{1}{4}x^2 + x - 4$

حل: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{1/2} = -2$
 $y = \frac{1}{4}(-2)^2 + (-2) - 4 = \frac{1}{4} - 5 = -\frac{19}{4}$



ج) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 4$
 $x=0 \rightarrow y = -4$



$$x = \frac{-b}{2a}$$

۲ اگر دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

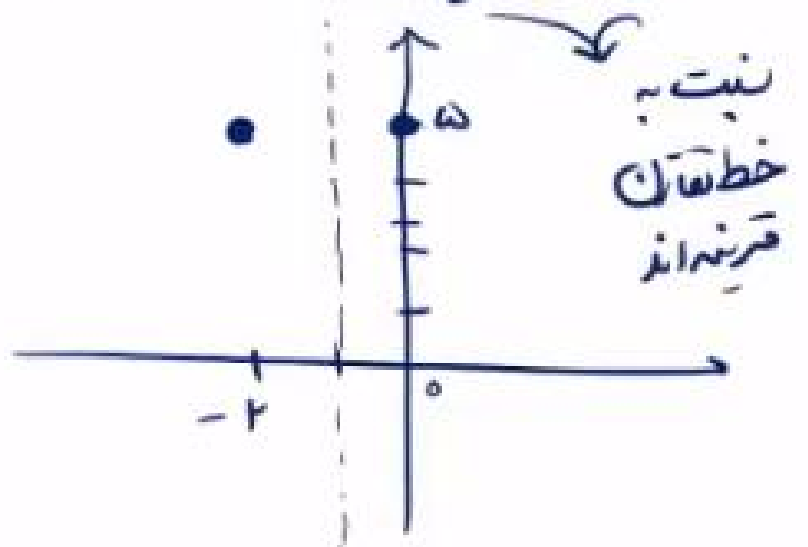
$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x = -1$$

$$\frac{-b}{2a} = -1$$

$$\frac{b}{2a} = 1$$

$$2a = b$$



۳ نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه $(0, 2)$ به عرض ۲ و محور x ها را

در نقاط به طول -1 و 2 قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

$$y = 0$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$(0, 2) \rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 2$$

$$c = 2$$

$$(-1, 0) \rightarrow a(-1)^2 + b(-1) + 2 = 0$$

$$a - b = -2$$

$$(2, 0) \rightarrow a(2)^2 + b(2) + 2 = 0$$

$$4a + 2b = -2 \div 2$$

$$2a + b = -1$$

محور x ها
 $x = 0$

$$\begin{cases} a - b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$$

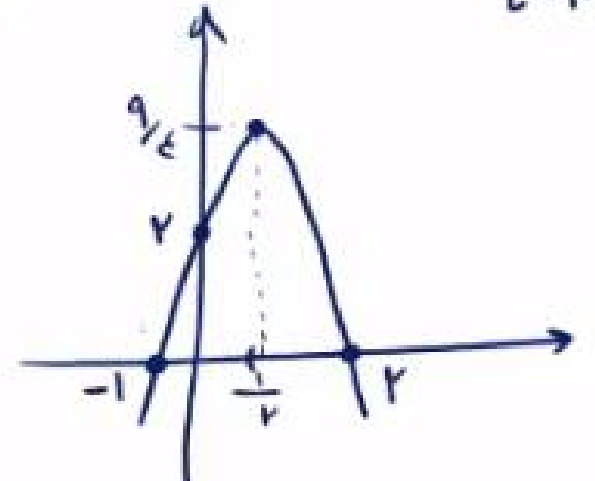
$$\frac{3a}{2} = -3$$

$$a = -1$$

$$-2 + b = -1$$

$$b = +1$$

$$y = -x^2 + x + 2 \rightarrow \text{پس } \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$





۲ دو برتابگر وزنه در یک مسابقه ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β

که $\alpha < \beta$ است، برتاب کرده‌اند. برتابگر A، زاویه α را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از

$$y = \frac{-1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$$

رابطه $y = \frac{-1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ به دست می‌آید.

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2 = 0$$

$$-x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

زمین $x = 4$ $x = -1$

برتابگر B نیز زاویه β را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه $y = -2x^2 + 3x + 2$ به دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده، بر حسب متر است. الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0$$

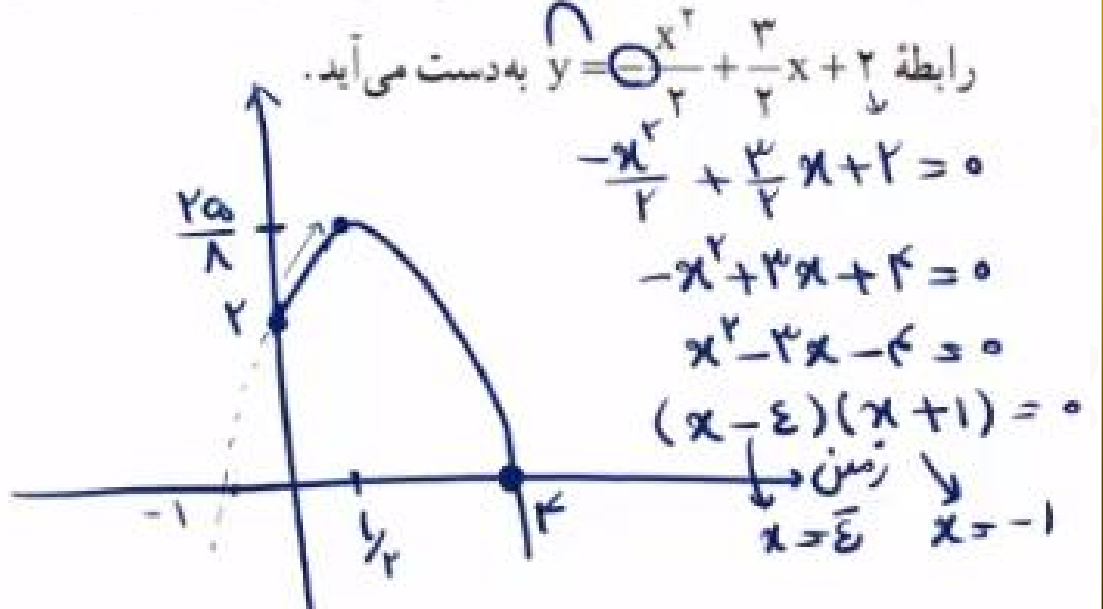
$$\Delta = 9 - 4(-2)(2) = 25$$

$$x = \frac{-3 + 5}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-3 - 5}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور x ها درجه تقاطعی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

برتابگر A β برتابگر B α



برتابگر B نیز زاویه β را انتخاب می‌کند و مسیر

طی شده از رابطه $y = -2x^2 + 3x + 2$ به دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح

زمین و x مسافت افقی طی شده، بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0$$

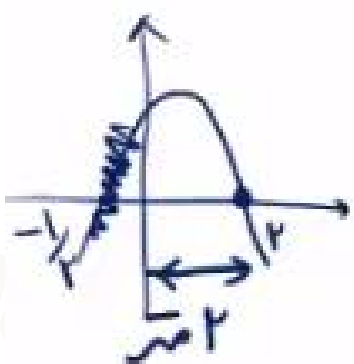
$$\Delta = 9 - 4(-2)(2) = 25$$

$$x = \frac{-3 + 5}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-3 - 5}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

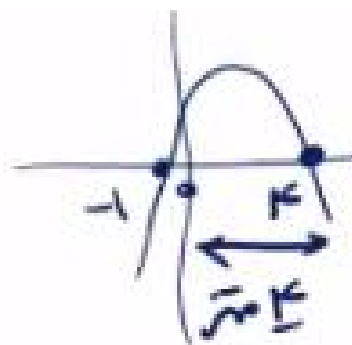
ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور x ها درجه تقاطعی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت

افقی بیشتری را طی کرده است؟



برتابگر B α

برتابگر A β





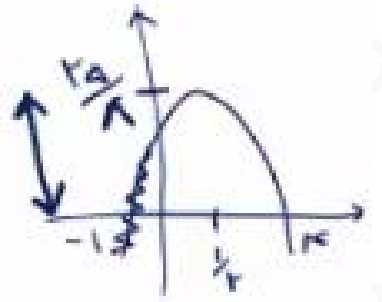
پ) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازه آنها را مشخص کنید.

ساز هستند

برآبتر B

برآبتر A

$$\frac{25}{8} = h$$



$$\frac{25}{8} = h$$





تمرین

$1 < 2x - 3 < 3$ و $2x - 3 < 1$

$x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4$

ریشه ندارد

$x^2 + 4 < 0 \rightarrow \Delta = 0 - 4(1)(4) = -16 < 0$ جواب ندارد

۱ در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.
نامعادله دوگانه

الف) $1 < 2x - 3 \leq 3$

$+3 \rightarrow 4 < 2x \leq 6$

$\div 2 \rightarrow 2 < x \leq 3$



جواب = $(2, 3]$

ب) $x(x^2 + 4) < 0$

$x=0$ ریشه ندارد

x		0		
x	-	•	+	
$x^2 + 4$	+	•	+	
P	-	•	+	

همواره مثبت است

جواب = $(-\infty, 0)$

نامعادله دوگانه

ب) $x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$

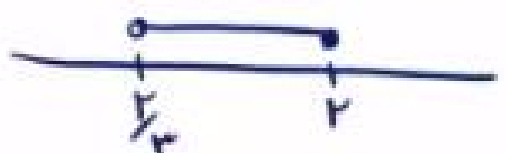
$x + 1 \leq 5 - x$
 $2x \leq 4$

$5 - x < 2x + 3$
 $-3x < -2$

$x \leq 2$

$\div (-3)$

$x > \frac{2}{3}$



جواب = $(\frac{2}{3}, 2]$

ج) $x(x^2 - 1) = x^3 - x \leq 0$

$x=0$
 $x = \pm 1$

ریشه دارد \rightarrow ریشه ندارد $\Delta < 0$

x		-1	0	1	
x	-	•	-	•	+
$x^2 - 1$	+	•	-	•	+
$x^3 - x$	+	•	+	•	+



جواب = $(-\infty, -1] \cup [0, 1] \cup [2, \infty)$



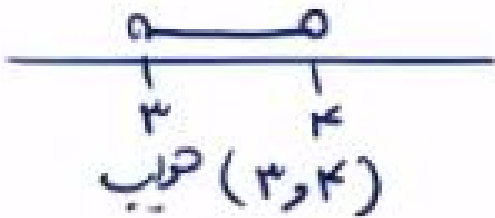
ج) $|7 - 2x| < 1$

$$-1 < 7 - 2x < 1$$

$$\xrightarrow{-7} -8 < -2x < -6$$

$$\xrightarrow{\div (-2)} +4 > x > +3$$

بیت عرض



ح) $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$

$$\frac{x-1}{2} - 1 \leq -3 \quad | \quad \frac{x-1}{2} - 1 \geq 3$$

$$\xrightarrow{+1} \frac{x-1}{2} \leq -2$$

$$\frac{x-1}{2} \geq 4$$

$$\xrightarrow{\times 2} x-1 \leq -4$$

$$x-1 \geq 8$$

$$\xrightarrow{+1} \boxed{x \leq -3}$$

$$\boxed{x \geq 9}$$



ب) $-2 < \frac{5-x}{2} < 0$

$$\xrightarrow{\times 2} -4 < 5-x < 0$$

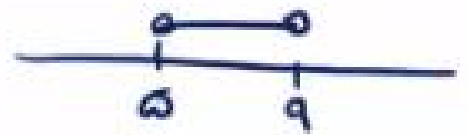
$$\xrightarrow{-5} -9 < -x < -5$$

ضرب منفی

بیت عرض

$$+9 > x > +5$$

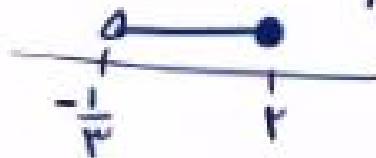
جواب (5, 9)



ن) $4-2x=0$ ریشه صوت $x=2$

$2x+1=0$ ریشه مخرب $x=-\frac{1}{2}$

x	$4-2x$	$2x+1$
$-\frac{1}{2}$	+	-
2	-	+
+	-	-





۲ به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 2x + k$ همواره مثبت است؟



$$1 > 0 \quad \checkmark$$

$$\Delta < 0 \rightarrow 9 - 4(1)(k) < 0$$

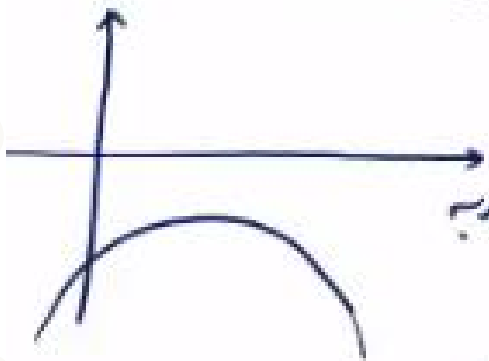
$$9 - 4k < 0$$

$$-4k < -9$$

تقسیم بر (-4)
جهت معین

$$k > \frac{+9}{4}$$

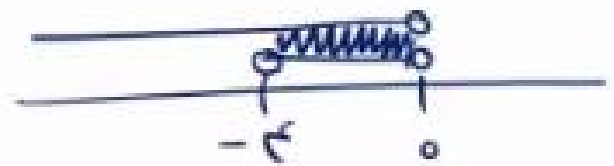
۳ به ازای چه مقادیری از m ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور x است؟



$$m \neq 0$$

$$m < 0$$

دخانه سهمی رو به پایین

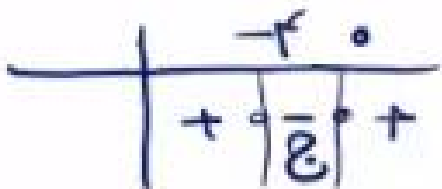


محور x را
تقاطع نکند

$$\Delta < 0 \rightarrow m^2 - 4(m)(-1) < 0$$

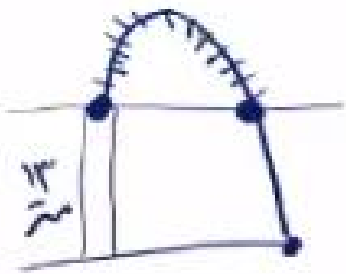
$$m^2 + 4m < 0 \rightarrow -4 < m < 0$$

← آماره ← صبر!





۴ یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر $-5t + 18 = 0$ ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $h = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود، در چه فاصله زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟



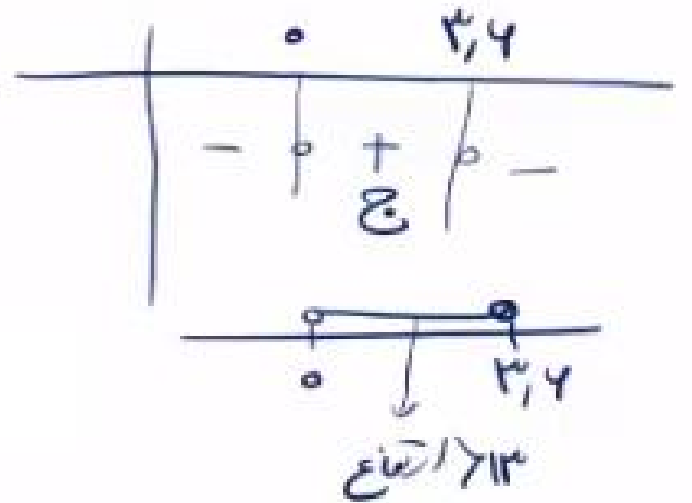
کاهش شروع: $t = 0 \rightarrow h = 13$

$$-5t^2 + 18t + 13 > 13$$

$$-5t^2 + 18t > 0$$

$$t(-5t + 18) > 0$$

به نفع \leftarrow صبر تعیین عدت



۵ تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول اند؟

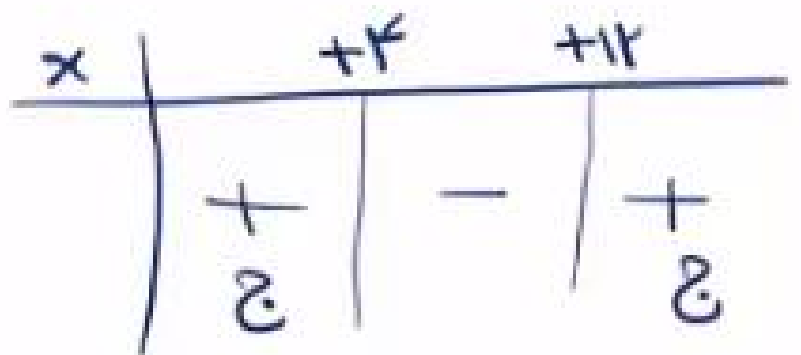
$$\frac{15}{8}x^2 - 30x + 200 > 110$$

$$\frac{15}{8}x^2 - 30x + 90 > 0$$

$$\frac{1}{8}x^2 - 2x + 6 > 0$$

$$x^2 - 14x + 48 > 0$$

به نفع \leftarrow صبر تعیین عدت



$$(x - 4)(x - 12) = 0$$

$$x < 4$$

$$x > 12$$

منطقاً نیست



تمرین

۱ کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می کند؟ توضیح دهید.

الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می دهد. ✓

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می دهد. ✓

ج) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می دهد. ✓

د) رابطه‌ای که به هر دانش آموز، دوستان او را نسبت می دهد. ✗

ه) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می دهد. ✗

و) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه سوم آن را نسبت می دهد. ✓

۲ مجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$ داده شده‌اند.

الف) به کمک نمودار بیکنی دو رابطه از A به B ارائه کنید که تابع باشند.

$$f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$$

$$g = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$$

ب) دو رابطه ارائه کنید که تابع نباشند.

$$F = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$$

ج) چهار رابطه به دست آمده را به کمک زوج‌های مرتب و نمودار نمایش دهید.

$$G = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$$

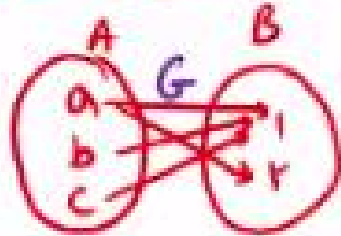
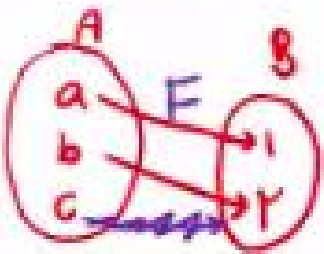
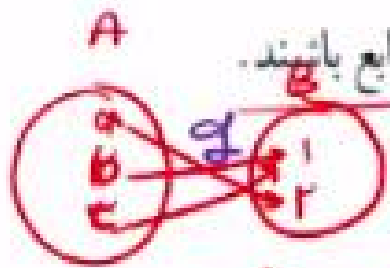
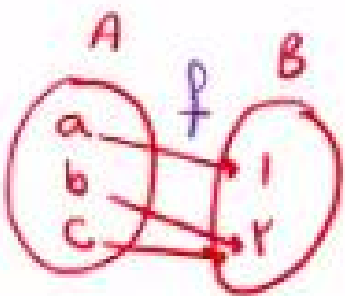
$x \rightarrow 4x$
مسطح \rightarrow ضلع

دما \rightarrow فرد

گروه خونی \rightarrow فرد



$$x \rightarrow \sqrt[3]{x}$$



$$F = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$$



۳ کدام یک از مجموعه‌های زیر یک تابع است؟

$f = \{(2, 1), (3, -5), (3, 7)\}$ ✗

$h = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1)\}$ ✓

$r = \{(2, 0), (-7, 0)\}$ ✓

$g = \{(0, 1), (\frac{3}{5}, 1), (-5, 1), (8, 1)\}$ ✓

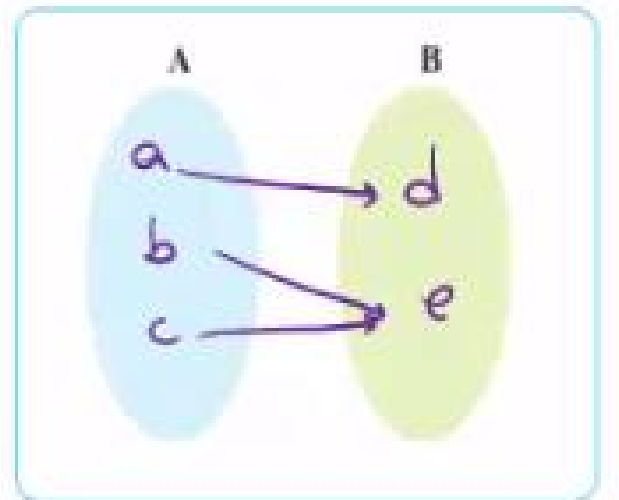
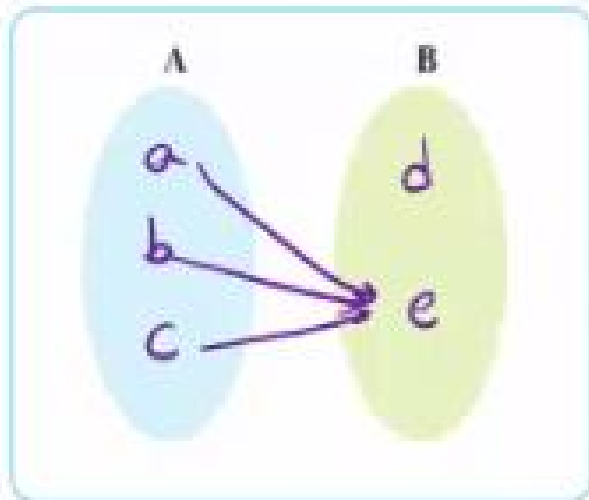
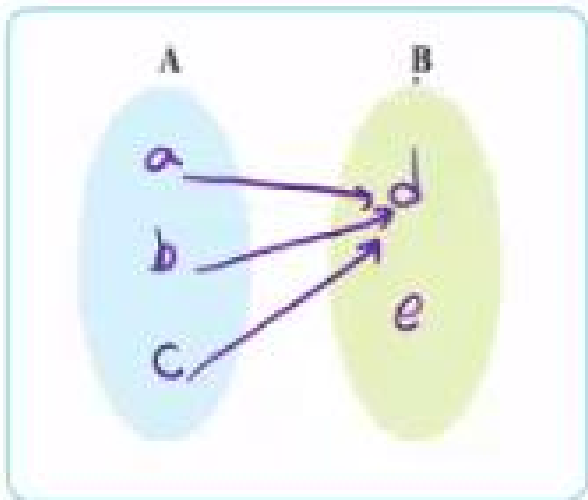
$k = \{(2, 5)\}$ ✓

$l = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots\}$ ✓
(مادامه که 5×8 و 4)



$\{2 \text{ عضوی}\} \rightarrow \{2 \text{ عضوی}\} \iff 2^2 = 4$

۲ A و B مجموعه‌هایی غیر عددی اند، در شکل زیر در A و B اعضای دلخواه بگذارید و یک تابع از A به B به کمک نمودار یک‌گانه ارائه کنید. سعی کنید لااقل سه تابع مختلف بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.





$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$$

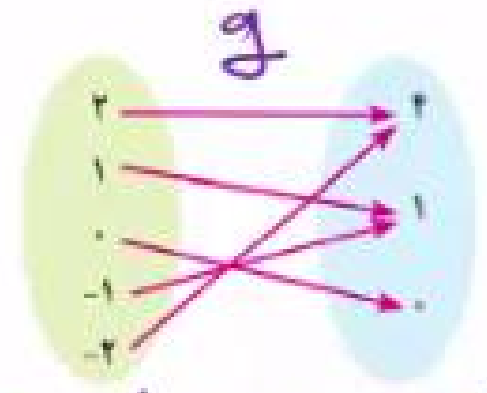
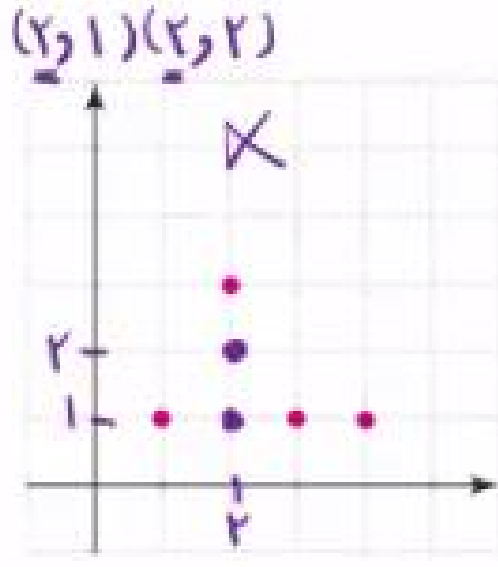
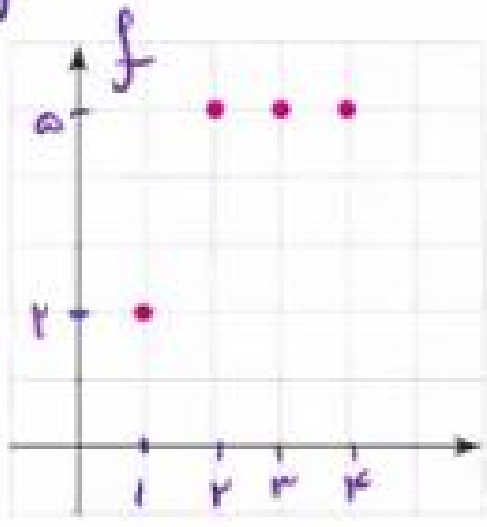
$$g = \{(2, 4), (1, 1), (0, 0), (-1, -1), (-2, -2)\}$$

تمرین

$$D_f = \{1, 2, 3, 4\}$$

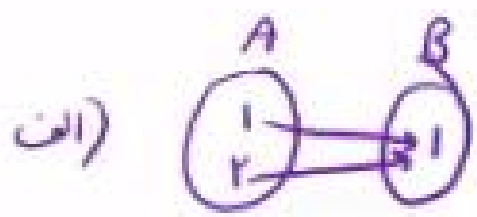
$$R_f = \{2, 5\}$$

۱ کدام یک تابع است؟
دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.

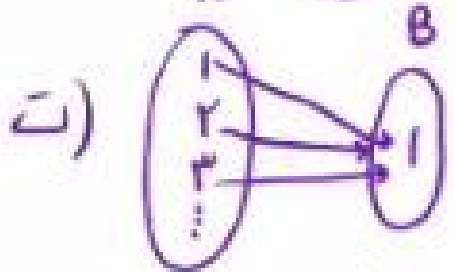
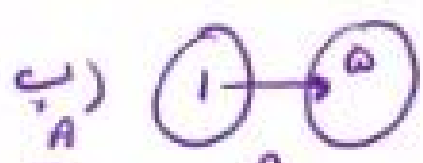


$$D_g = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$R_g = \{0, 1, 4\}$$



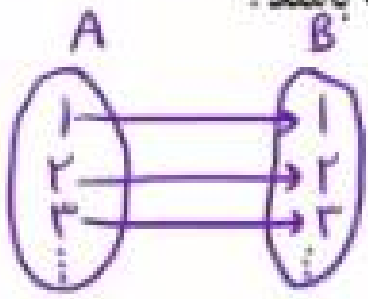
ب) مثال الف



$$f(n) = 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

ت) دامنه آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

ث)



$$f(n) = n \quad n \in \mathbb{N}$$

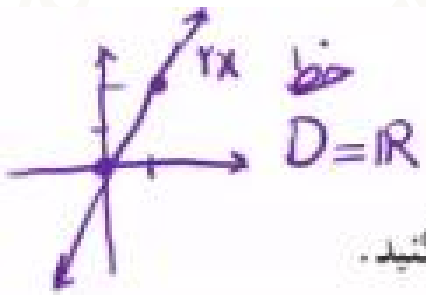
ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

۲ تابعی مثال بزنید که :

الف) دامنه آن تنها شامل دو عضو باشد.

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

پ) دامنه آن تنها یک عضو داشته باشد.



جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده‌اند، رسم کنید.

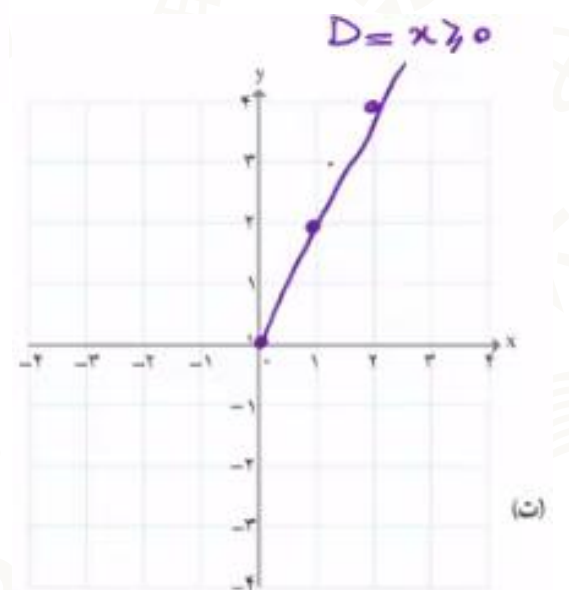
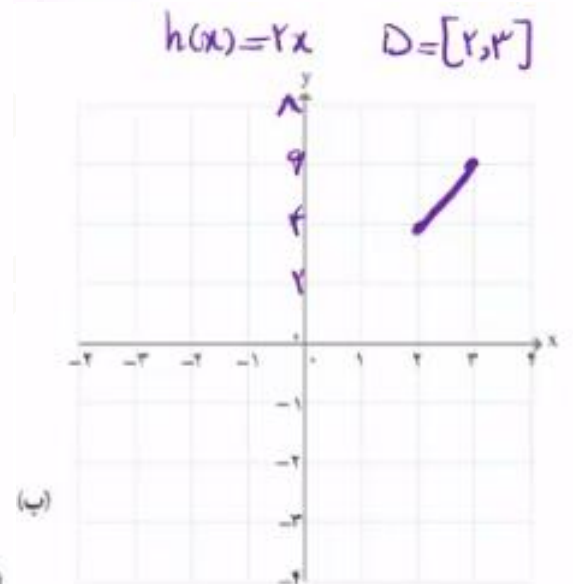
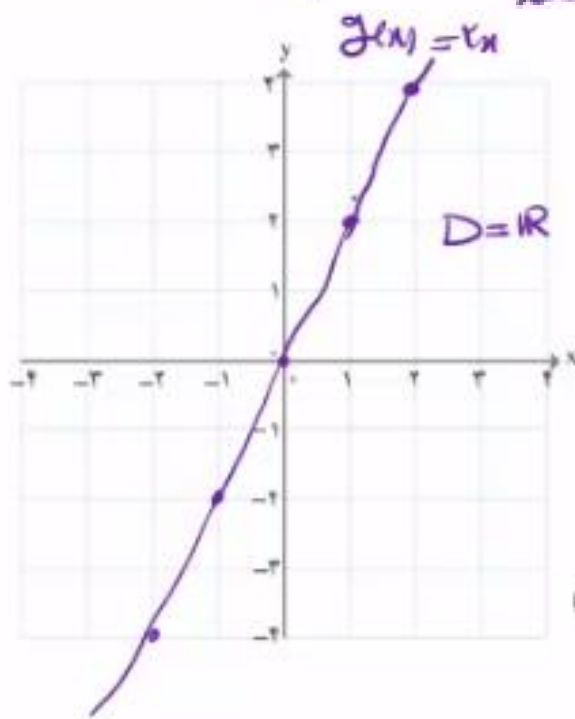
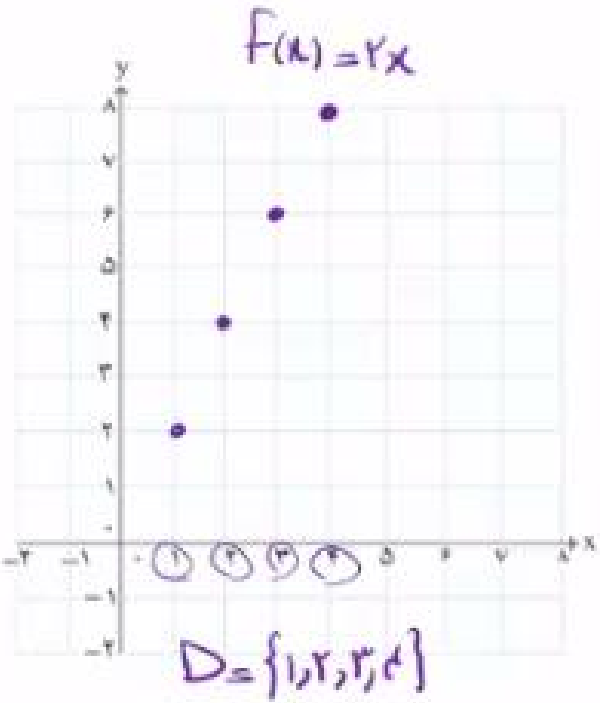
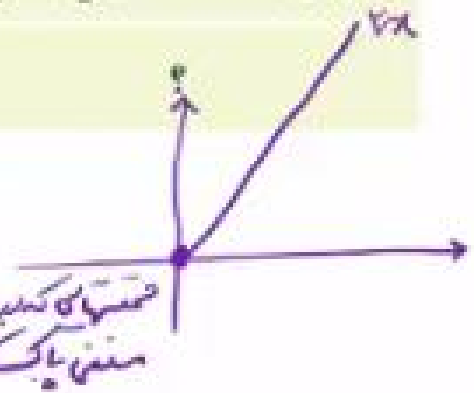
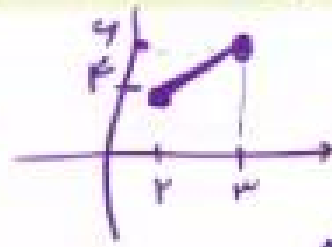
(الف)

(ب)

(ب)

(ت)

تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$y = 2x$
دامنه	$D = \{1, 2, 3, 4\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$D = [2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفرد
بره	$R = \{2, 4, 6, 8\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$R = [4, 6]$	



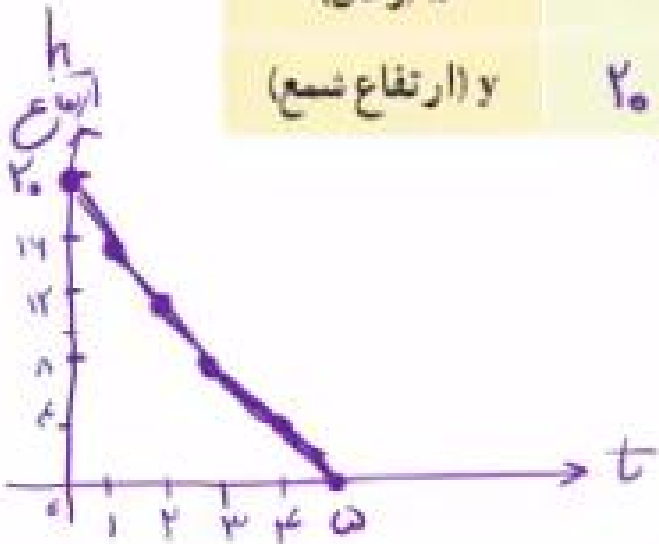


۲ یک شمع ۲۰ سانتی متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی متر آن می سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟
جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

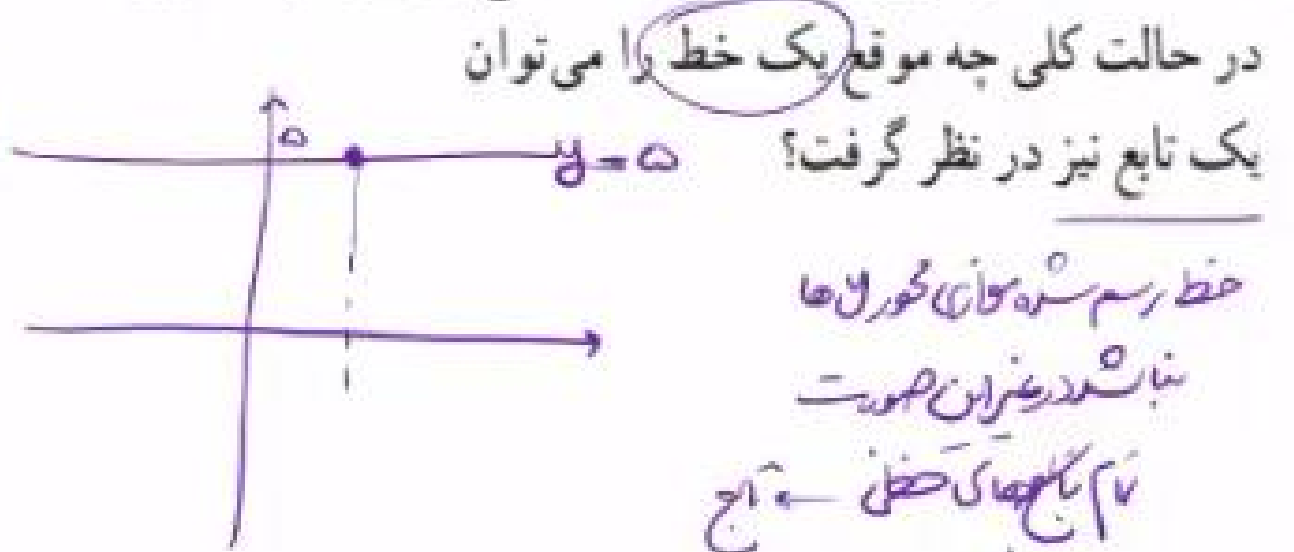
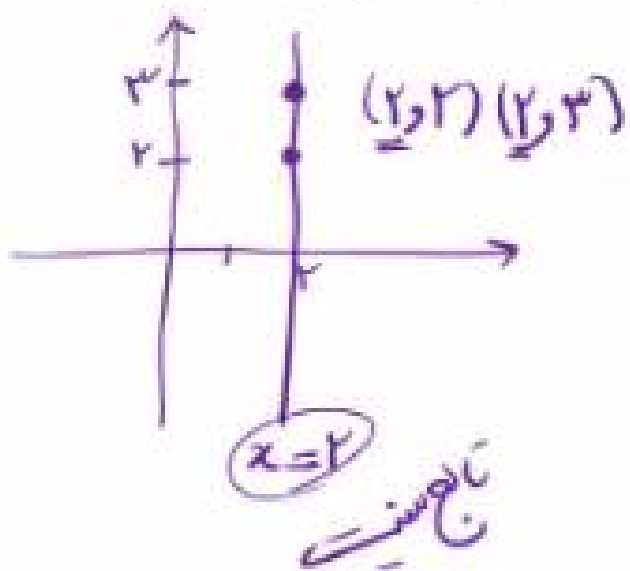
x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)	۲۰	۱۶	۱۲	۸	۴	۰



نمودار این تابع را رسم کنید.
چرا این تابع، یک تابع خطی است؟



۵ آیا خط $x = 2$ را می توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ خط $y = 5$ را چگونه؟



در حالت کلی چه موقع یک خط را می توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟
خط رسم شده همان محور آن است
بنابراین در این صورت نام تابع های خطی - تابع رابطه

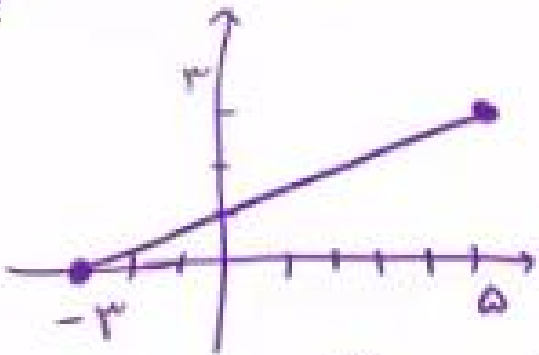


$$\begin{matrix} (x_1, y_1) \\ (x_2, y_2) \end{matrix} \rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

معادله خط راست $y - y_1 = m(x - x_1)$

نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنه آن بازه $[-3, 5]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع وجود دارند؟

سه تا

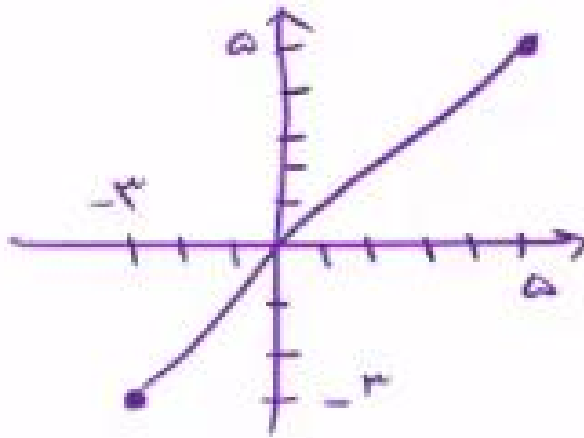


$$\begin{matrix} (-3, 0) \\ (5, 3) \end{matrix} \rightarrow$$

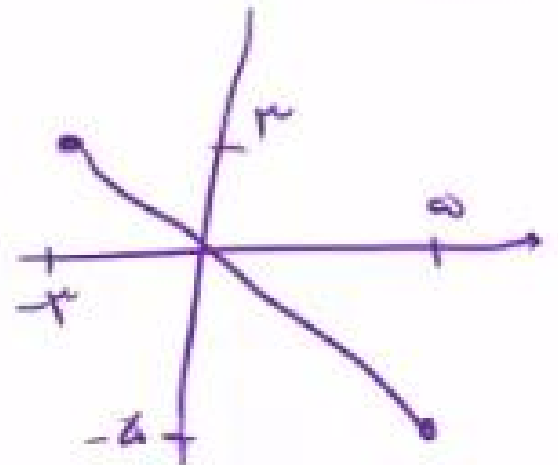
$$m = \frac{3-0}{5-(-3)} = \frac{3}{8}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{3}{8}(x + 3)$$



$$y = f(x) = x$$



$$f(x) = -x$$

$$\begin{matrix} (-3, 0) \\ (1, 2) \end{matrix}$$

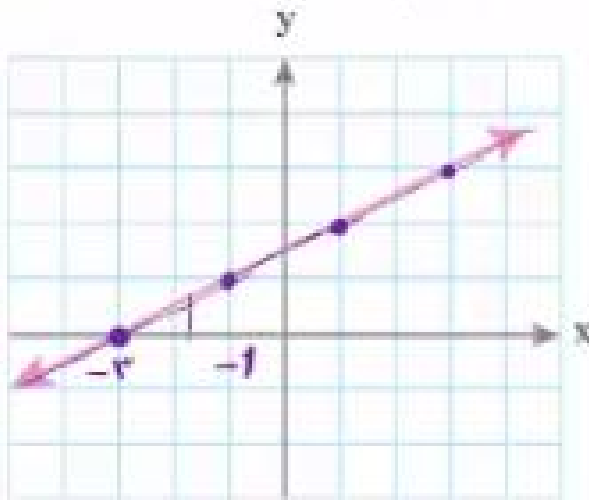
$$m = \frac{2-0}{1-(-3)} = \frac{1}{2}$$

نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به دست آورید.

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x + 3)$$

از بین نمایش‌های مختلفی که برای این تابع می‌دانید، کدام یک مناسب‌تر است؟

نمایش جبری $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



~~$(-2, 0)$ $(1, 1)$ $(1, 2)$ $(3, 3)$~~

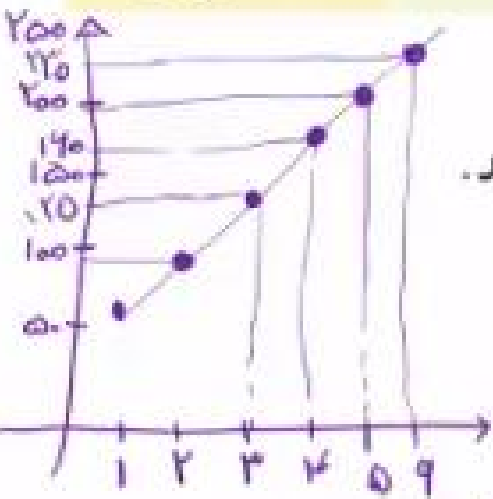


$$y = 35x + 20$$

عمق
↓
دما

۸ جدول زیر دمای سنگ‌ها در عمق‌های متفاوت زیر سطح زمین را نشان می‌دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی‌گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰



در عمق ۲، سنگ دارای دودساک مسامرت است پس تابع را رسم کنید.

$$m = \frac{90 - 55}{2 - 1} = 35$$

$$y - 55 = 35(x - 1)$$

$$y - 55 = 35x - 35 \rightarrow y = 35x + 20$$

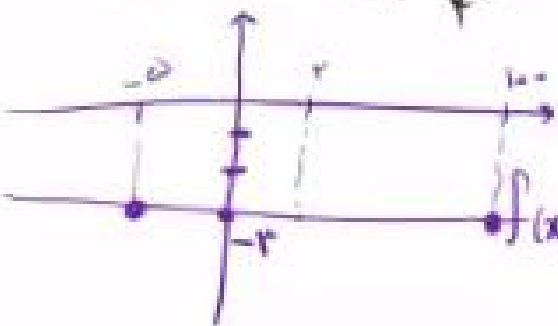
(ب) معادله‌ای برای این تابع به دست آورید.

(پ) دمای یک سنگ را که در عمق ۱۰ کیلومتری زیر زمین است، بیابید.

$$f(10) = 35 \times 10 + 20 = 370$$

موانع خود را ← تابع ثابت ← خروجی‌ها مثل هم.

۹ الف) تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مقادیر $f(2)$ و $f(100)$ و $f(-5)$ و $f(\sqrt{5})$ و $f(-\frac{3}{4})$ را به دست آورید.



$$f(2) = -3$$

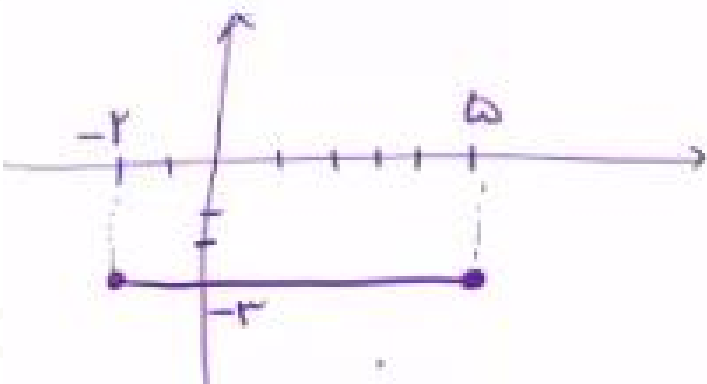
$$f(100) = -3$$

$$f(-5) = -3$$

$$f(\sqrt{5}) = -3$$

$$f(-\frac{3}{4}) = -3$$

(ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.



(ب) نمودار این تابع را وقتی که دامنه آن بازه $[-2, 5]$ باشد، نیز رسم کنید.



خطی $f(x) = ax + b$

۱ برای یک تابع خطی می دانیم که: $f(0) = 7$ و $f(2) = 11$. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

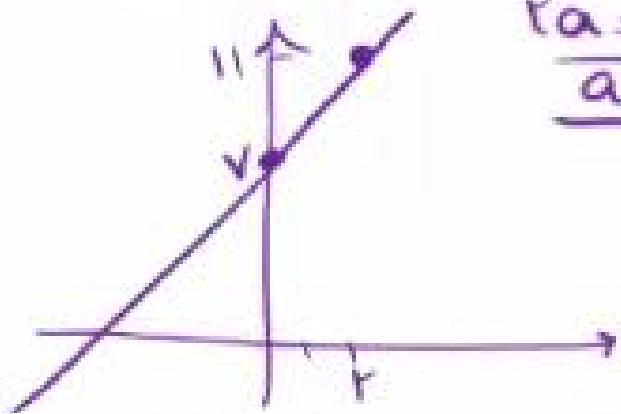
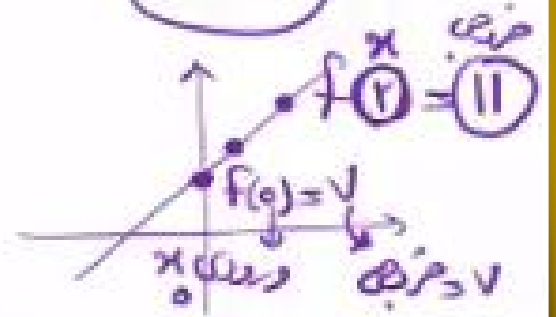
$f(x) = ax + b$

$f(0) = 7 \rightarrow a(0) + b = 7 \rightarrow b = 7$

$f(2) = 11 \rightarrow a(2) + b = 11 \rightarrow 2a + 7 = 11$

$2a = 4$
 $a = 2$

نمایش جبری $f(x) = 2x + 7$



۱۱ آیا جدول زیر یک تابع را نشان می دهد؟ چرا؟ بله زیرا به ازای هر عدد خروجی منحصراً

x	1	2	3	4	5	6
y	1	4	9	15	25	36

$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \{1, 2, 3, 5, 6\} \\ 15 & x = 4 \end{cases}$

۱۲ علی در هر دقیقه پیاده روی، مسافت ۰/۸ کیلومتر را طی می کند. اگر مسافتی را که علی در t دقیقه طی می کند، با f(t) نمایش دهیم،

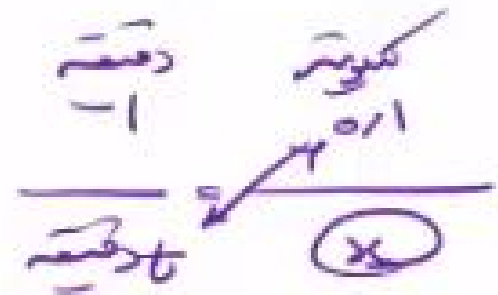
کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می دهد؟

الف) $f(t) = t - 0.8$

ب) $f(t) = t + 0.8$

ب) $f(t) = 0.8t$

ن) $f(t) = 0.8 - t$

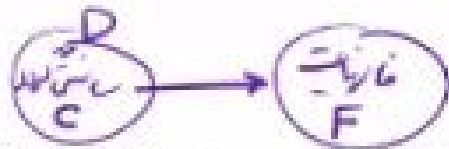
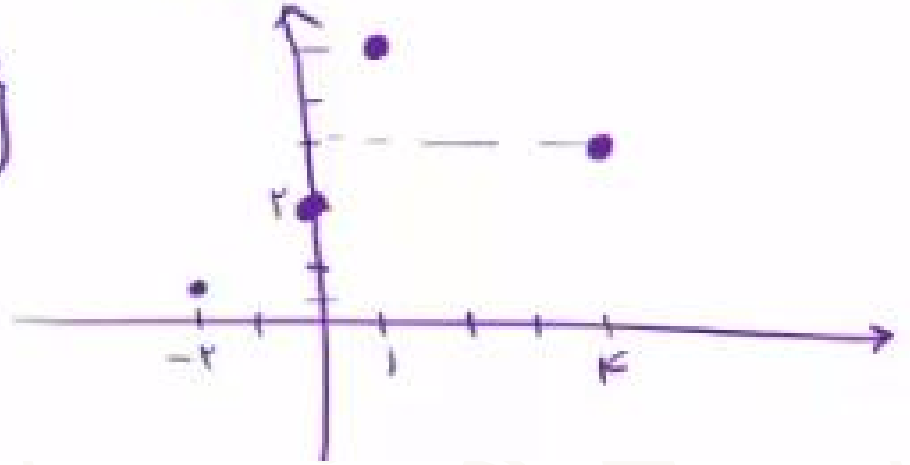




۱۲ اگر درباره تابع g داشته باشیم: $g(0) = 2, g(1) = 5, g(-2) = \frac{1}{3}, g(4) = 3$ را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

$$g = \left\{ (0, 2), (1, 5), \left(-2, \frac{1}{3}\right), (4, 3) \right\}$$

$$D = \{0, 1, -2, 4\}$$



۱ برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سنتی گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می‌شود که با رابطه $F = \frac{9}{5}C + 32$ به یکدیگر وابسته‌اند.

فارنهایت بر حسب سانتی‌گراد

الف) -20 درجه سانتی‌گراد، چند درجه فارنهایت است؟
 ب) 104 درجه فارنهایت چند سانتی‌گراد است؟

ب) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را بر حسب فارنهایت به دست آورد.

ب) $F = 104$

$$\frac{9}{5}C + 32 = 104$$

$$\frac{9}{5}C = 104 - 32 = 72$$

$$\frac{9}{5}C = 72 \rightarrow C = \frac{72 \times 5}{9} = 40$$

$$\frac{9}{5}C = F - 32$$

$$\xrightarrow{\times \frac{5}{9}} C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

ت) آیا رابطه بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می‌کند؟

فارنهایت بر حسب سانتی‌گراد $F = \frac{9}{5}C + 32$



محیط \rightarrow عرض

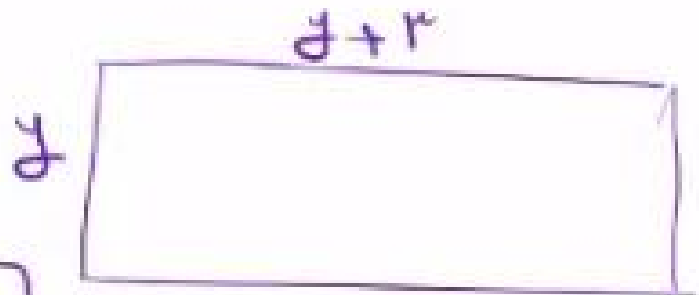
$$2p = 2b$$

۱۵ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را بر حسب تابعی از عرض آن بیان کند.

$$p = \text{محیط}$$

$$f(y)$$

$$f(y) = (\text{طول} + \text{عرض}) \times ۲$$

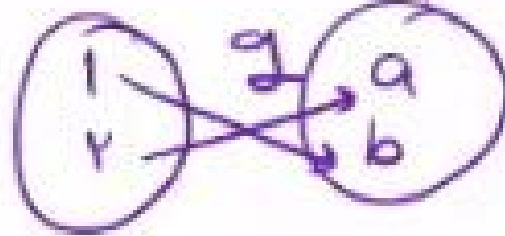
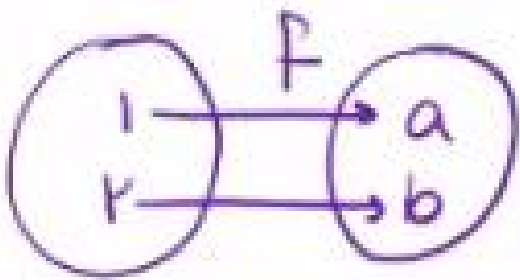


$$\text{محیط} = \frac{(y+3 + y) \times ۲}{۲} = ۲y+۶$$

$$R_f = R_g = \{a, b\}$$

۱۶ دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

$$D_f = D_g = \{۱, ۲\}$$



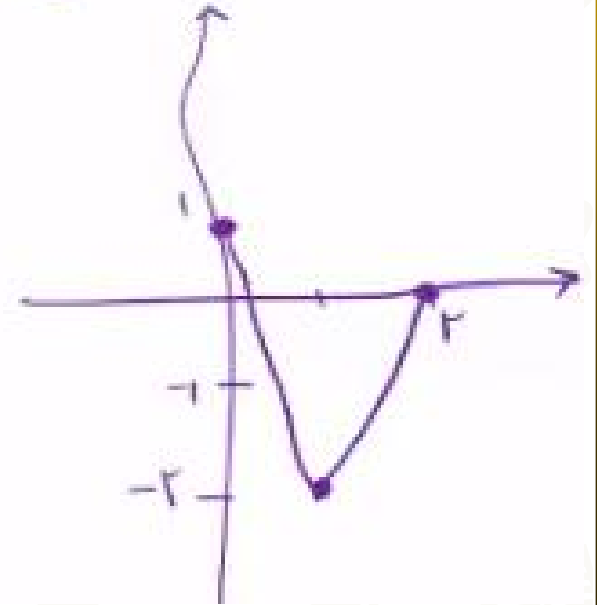
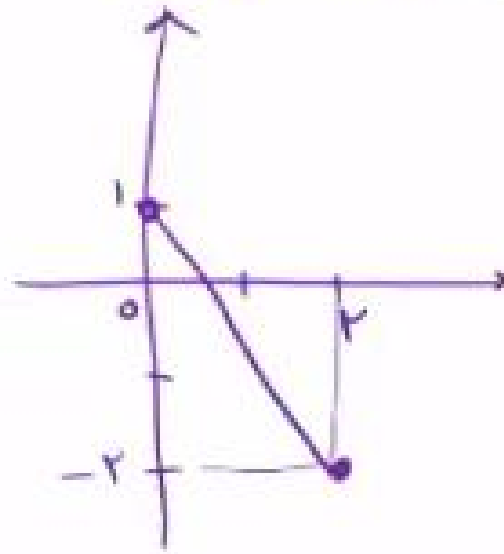
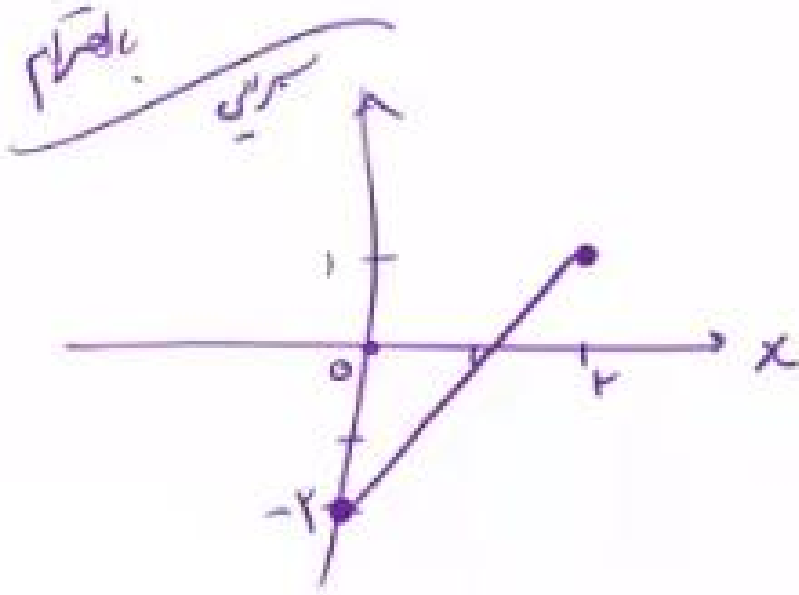
$$f = \{(1, a), (2, b)\}$$

$$g = \{(1, b), (2, a)\}$$



۱۷ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[0, 2]$ و برد آن $[-2, 1]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع می توان رسم کرد؟

$$R = [-2, 1] \quad D = [0, 2]$$





تمرین

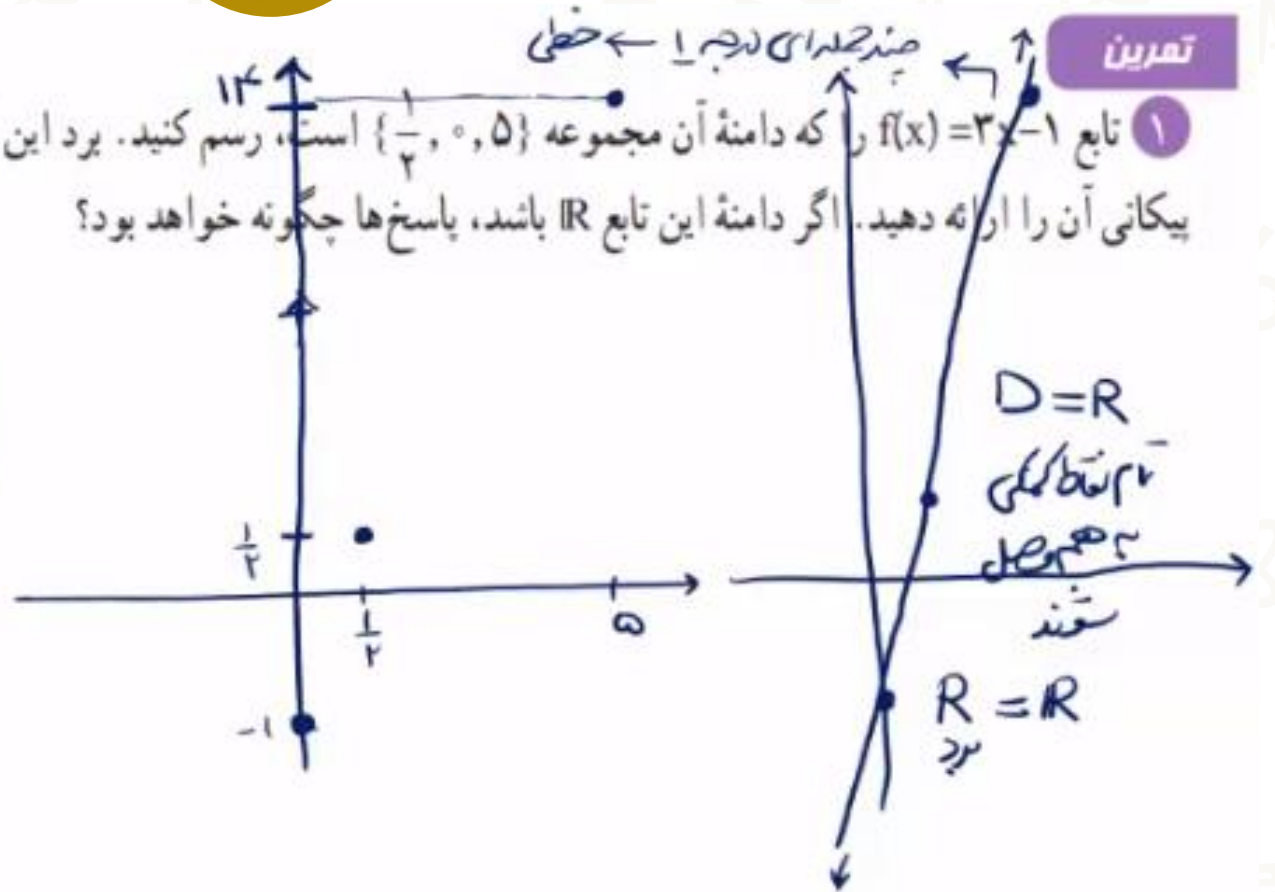
۱ تابع $f(x) = 3x - 1$ را که دامنه آن مجموعه $\{\frac{1}{4}, 0, 5\}$ است، رسم کنید. برد این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار بیگانه آن را ارائه دهید. اگر دامنه این تابع \mathbb{R} باشد، پاسخها چگونه خواهد بود؟

$$f(x) = 3x - 1$$

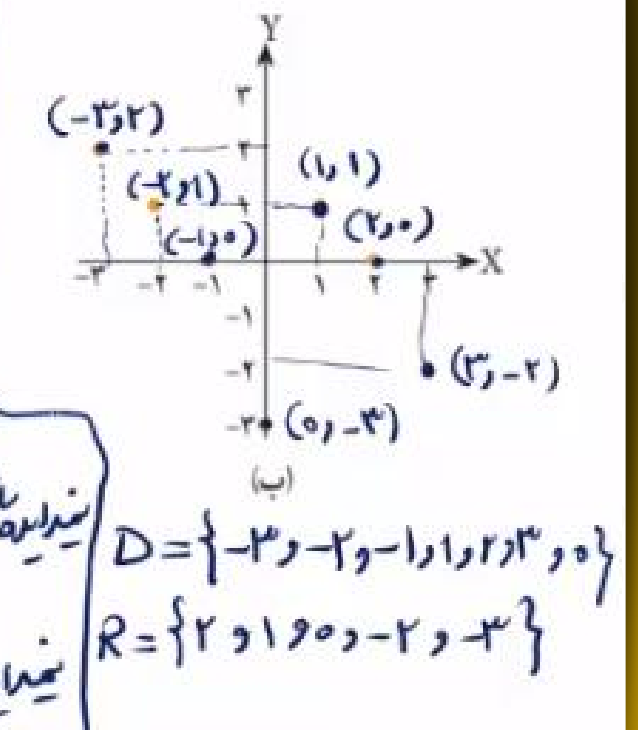
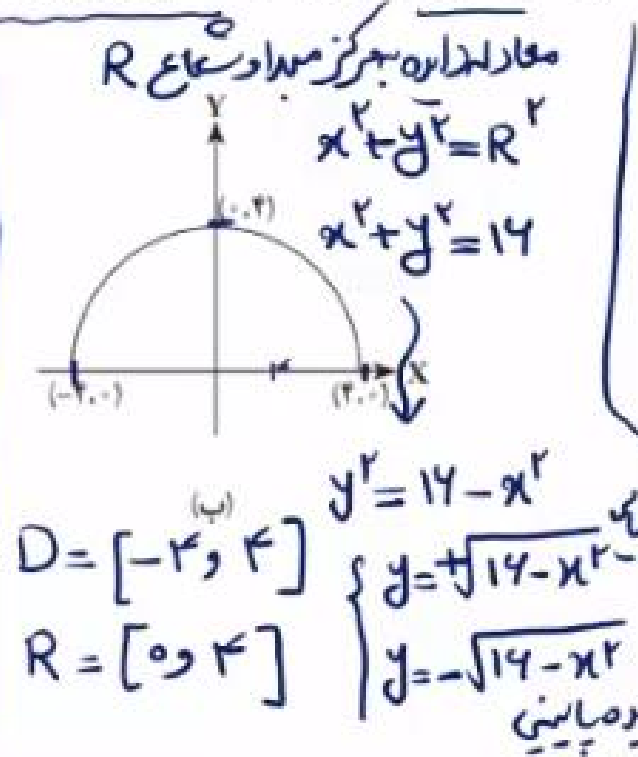
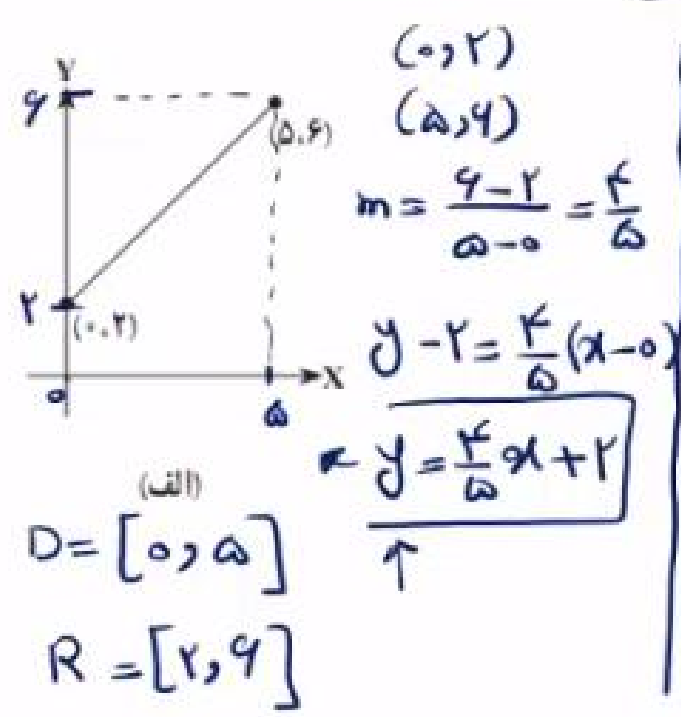
$$D = \{\frac{1}{4}, 0, 5\}$$

$$P = \{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (0, -1), (5, 14)\}$$

$$R = \{\frac{1}{4}, -1, 14\}$$



۲ در شکل های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.





$y = +ax^2 + k$ ← منفی a

$D = [-1, 4]$
 $R = [-5, 4]$

(ن) $y = -(x-2)^2 + 4$

رأس $S = (2, 4)$

$y = a(x-2)^2 + k$

$(5, 0) \rightarrow 0 = a(5-2)^2 + k$
 $0 = 9a + k$
 $-1 = a$

(ن) $y = -x^2 + 3$

$D = R$

برد $R = (-\infty, 3]$

$D = [-2, 8]$
 $R = [-1, 7]$

(ج) $(0, -1)$
 $(8, 7)$
 $m = \frac{7 - (-1)}{8 - 0} = 1$

$(0, -1)$
 $(-2, 2)$
 $m = \frac{2+1}{-2-0} = -\frac{3}{2}$

$y - 2 = -\frac{3}{2}(x+2)$

$y = -\frac{3}{2}x - 1$

$-2 \leq x \leq 0$

$y + 1 = 1(x - 0)$
 $y = x - 1$

$0 \leq x \leq 8$

(الف)

$D = R$
 $R = [-1, +\infty)$

(ب)

$D = R$
 $R = [-\frac{1}{3}, +\infty)$

(پ) $f(x) = 2$ ثابت

۳ درستی یا نادرستی گزاردهای زیر را بررسی کنید.

(الف) دامنه تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $(-\infty, +\infty)$ و برد آن نیز $(0, +\infty)$ است. \times

(ب) دامنه تابع $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$ همه اعداد حقیقی و برد آن $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ است. \times

(پ) دامنه تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ است. \checkmark

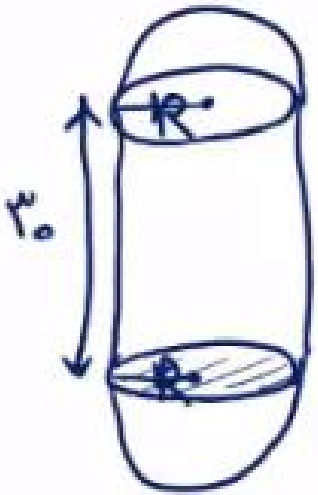
(ت) اگر $f(x) = 2x + 1$ آنگاه، $f(1) = \frac{f(2)}{2}$ \times

$f(1) = 2(1) + 1 = 3$

$f(2) = 2(2) + 1 = 5$



۴ یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع R در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه 30 متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.



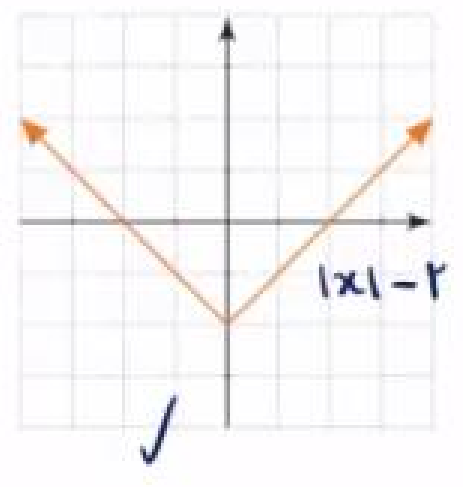
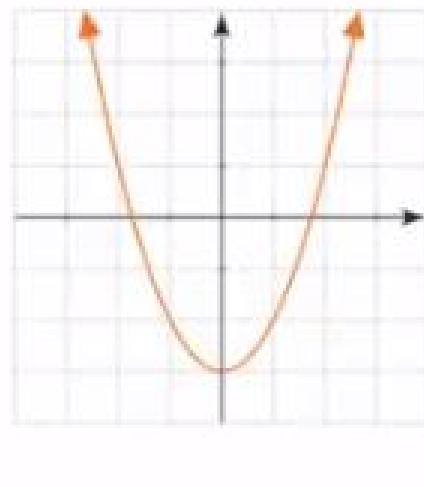
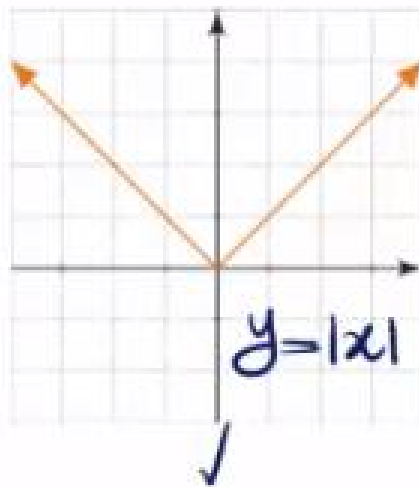
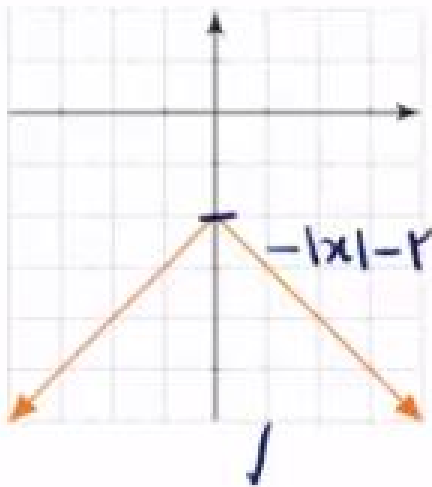
$$V = V_{\text{استوانه}} + 2 \times V_{\text{نیمکره}} \rightarrow \text{کره کامل}$$

تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

$$V_{\text{تانکر}} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت پایه (دایره)} + \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V = \pi R^2 \times 30 + \frac{4}{3} \pi R^3$$

۵ هریک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



الف) $y = x^2 - 3$

ت) $y = (x+1)^2$

خ) $y = |x| - 2$

ب) $y = -x^2 + 2$

ج) $y = |x| - \frac{1}{2}$

د) $y = (x-2)^2 + 2$

→ ~~ی) $y = |x|$~~

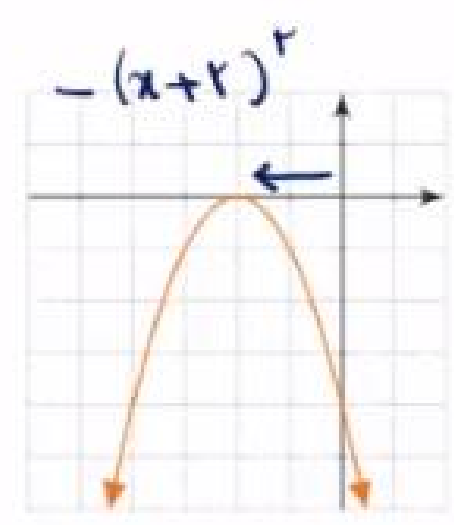
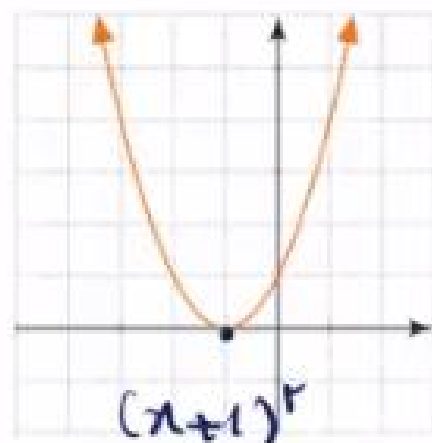
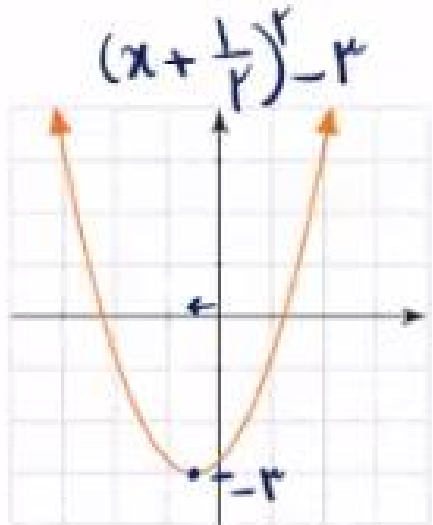
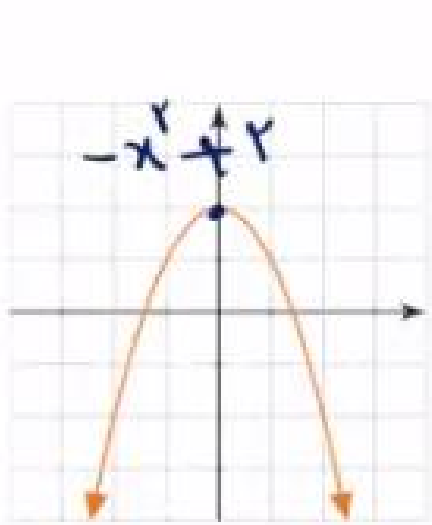
→ ج) $y = |x-2|$

→ ~~ز) $y = |x| - 2$~~

→ ت) $y = -|x|$

ح) $y = -(x+2)^2$

ر) $y = (x + \frac{1}{2})^2 - 3$

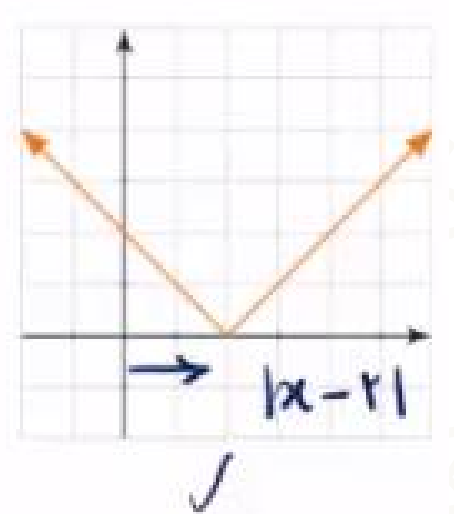
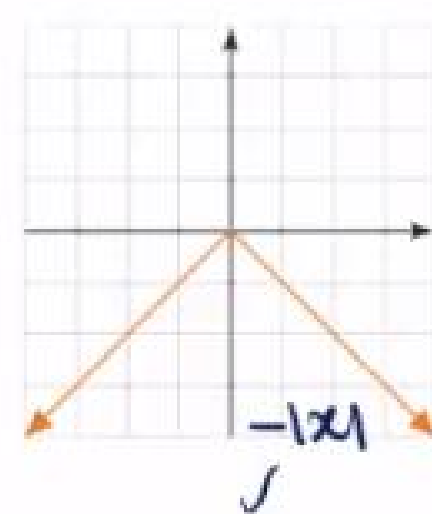
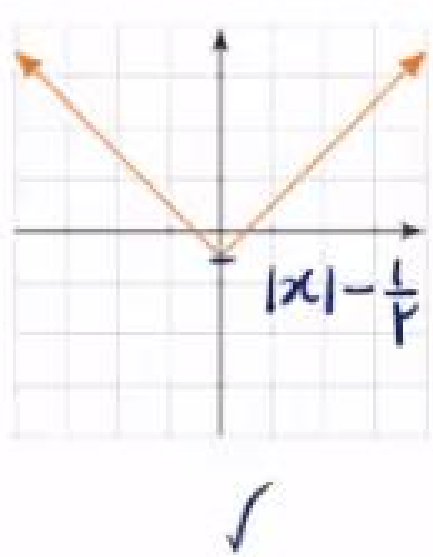
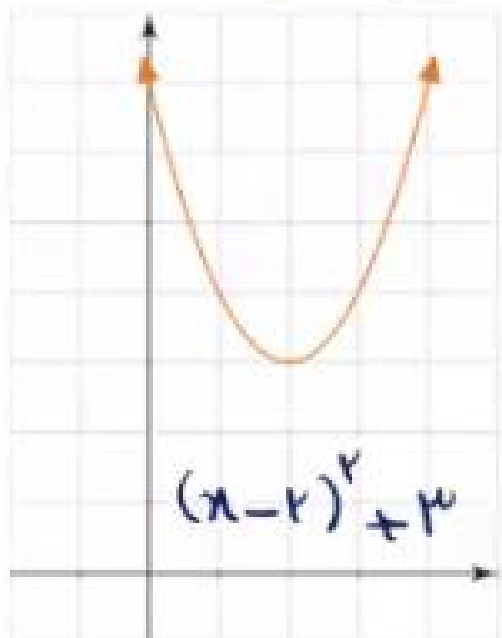


- الف) ~~y = x^2 - 3~~
- ب) ~~y = (x + 1)^2~~
- ج) ~~y = -|x| - 2~~

- ب) ~~y = -x^2 + 2~~
- ج) ~~y = |x| + 1/2~~
- د) y = (x - 2)^2 + 3

- ب) ~~y = |x|~~
- ج) ~~y = |x - 2|~~
- د) ~~y = |x| + 2~~

- ب) ~~y = -|x|~~
- ج) ~~y = -(x + 2)^2~~
- د) y = (x + 1/2)^2 - 3



- الف) y = x^2 - 3
- ب) y = (x + 1)^2
- ج) ~~y = -|x| - 2~~

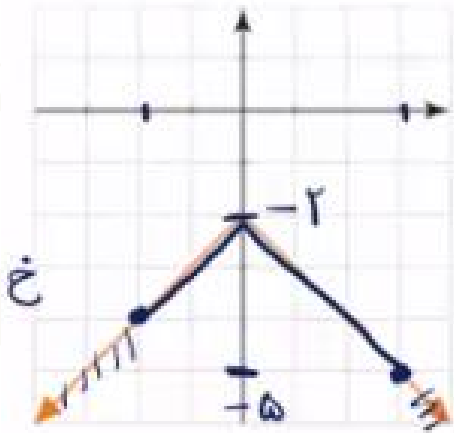
- ب) y = -x^2 + 2
- ج) ~~y = |x| + 1/2~~
- د) y = (x - 2)^2 + 3

- ب) ~~y = |x|~~
- ج) ~~y = |x - 2|~~
- د) ~~y = |x| + 2~~

- ب) ~~y = -|x|~~
- ج) y = -(x + 2)^2
- د) y = (x + 1/2)^2 - 3

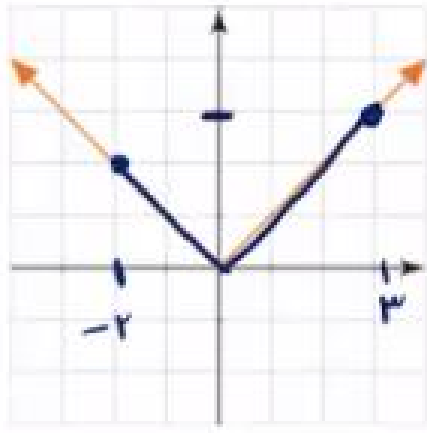


۶ فرض کنیم دامنه هر یک از توابع تمرین ۵ به بازه $[-2, 3]$ محدود شده باشد. در این صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.

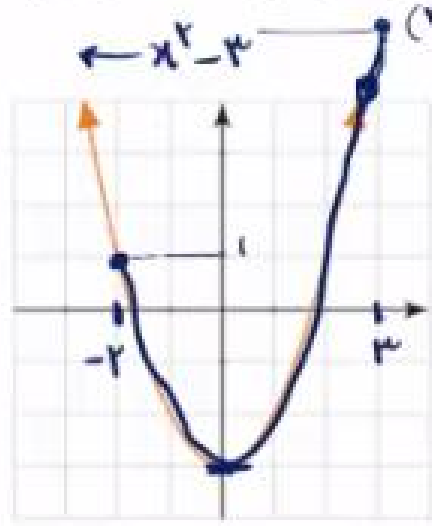


$$D = [-2, 3]$$

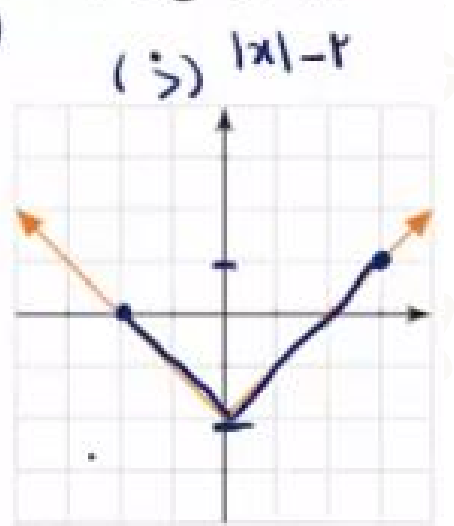
$$R = [-5, -2]$$



$$D = [0, 3]$$



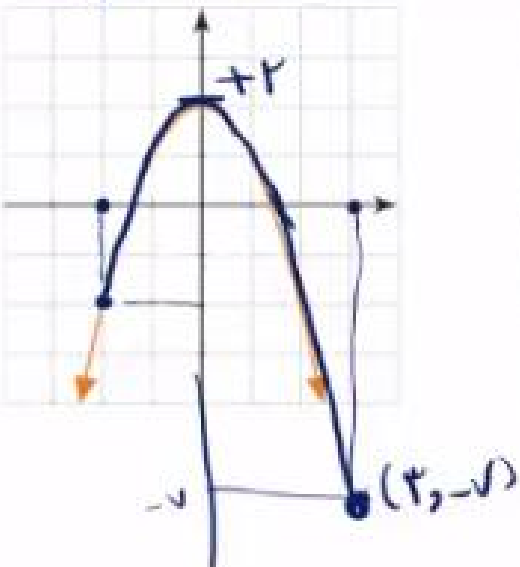
$$D = R = [-2, 4]$$



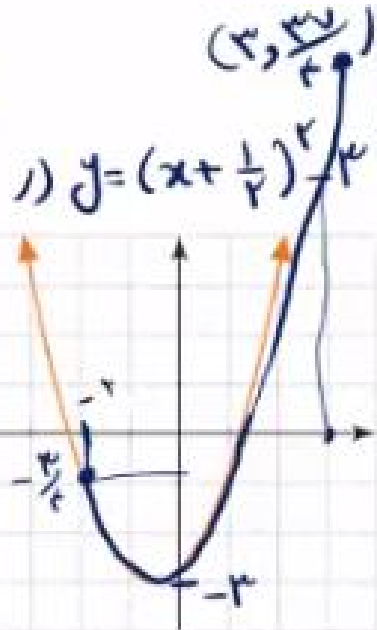
$$R = [-2, 1]$$

$$-(3)^2 + 2 = -9 + 2 = -7$$

$$y = -x^2 + 2$$



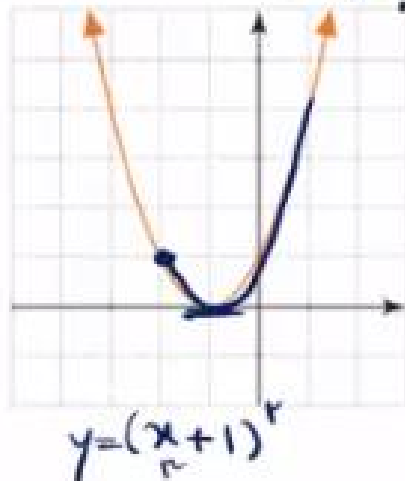
$$D = [-7, 2]$$



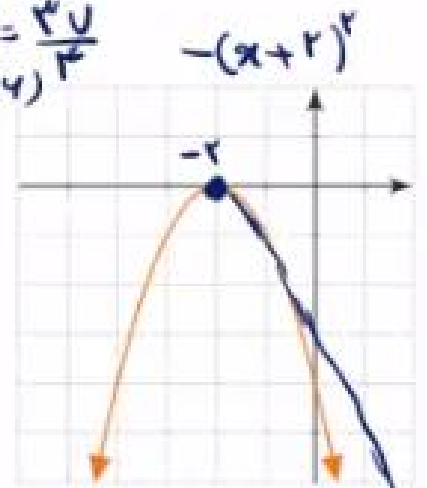
$$D = \left[-3, \frac{37}{4}\right]$$

$$\left(-2 + \frac{1}{4}\right)^2 - 3 = \frac{9}{16} - 3 = -\frac{45}{16}$$

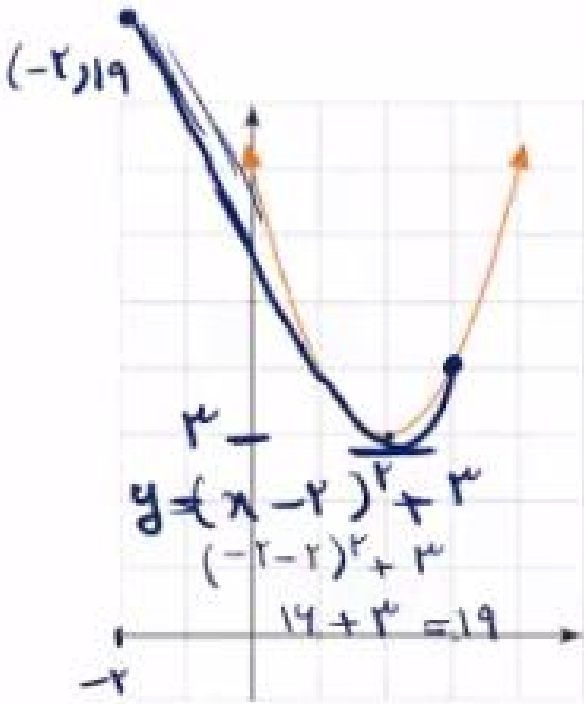
$$\left(3 + \frac{1}{4}\right)^2 - 3 = \frac{49}{16} - 3 = \frac{17}{16}$$



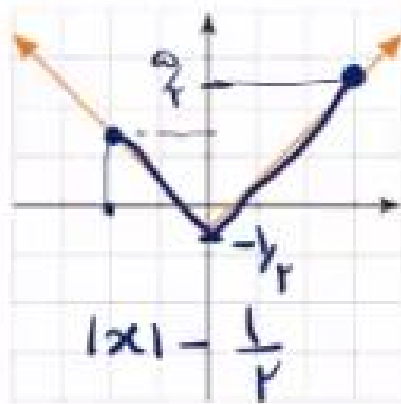
$$D = [0, 14]$$



$$D = [-15, 0]$$

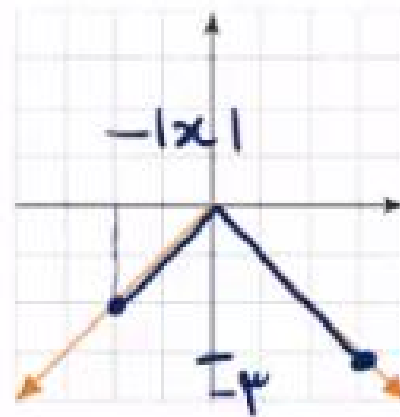


$\text{رد} = [3, 19]$

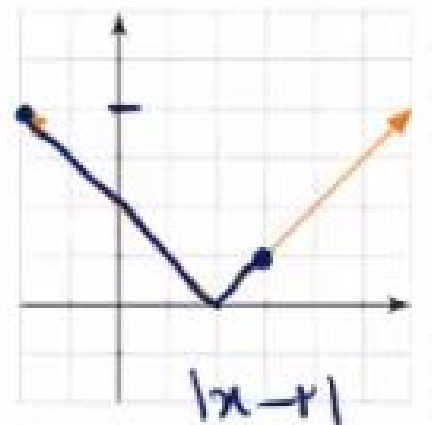


$| -2 | - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
 $| 3 | - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$\text{رد} = [-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$



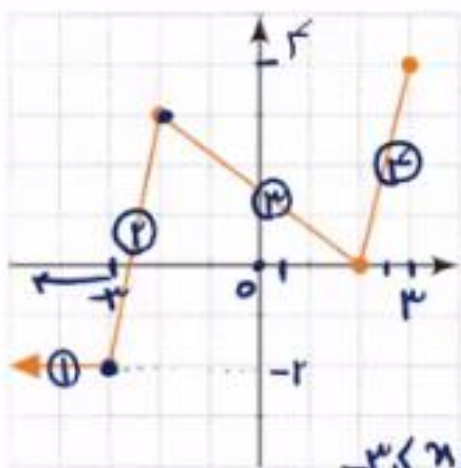
$\text{رد} = [-3, 0]$



$\text{رد} = [0, 2]$

$5(\frac{5}{2}) + 13$

نمودار تابع f داده شده است. ضابطه این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید



تابع ۳ تریگ

$f(\sqrt{5})$
 $f(x)$
 $f(3) = 4$

$f(x) = \begin{cases} 5x + 13 & -2 \leq x \leq -2 \\ -2x & -2 < x < 2 \\ \frac{4}{3}x - 1 & 2 \leq x \leq 2 \end{cases}$

خطرات

$m = \frac{3 - (-2)}{-2 - (-3)} = \frac{5}{1} = 5$
 $y - 3 = 5(x + 2)$
 $y = 5x + 13$

$m = \frac{0 - 3}{2 - (-2)} = \frac{-3}{4}$
 $y - 0 = \frac{-3}{4}(x - 2)$
 $y = \frac{-3}{4}x + \frac{3}{2}$

$m = \frac{4 - 0}{3 - 2} = 4$
 $y - 0 = 4(x - 2)$
 $y = 4x - 8$



۸ نمودار یک تابع خطی از نقاط $(0, 3)$ و $(4, 3)$ می‌گذرد. $f(-1)$ و $f(-4)$ را به دست آورید.

$$f(-4) = 3$$

$$f(-1) = 3$$

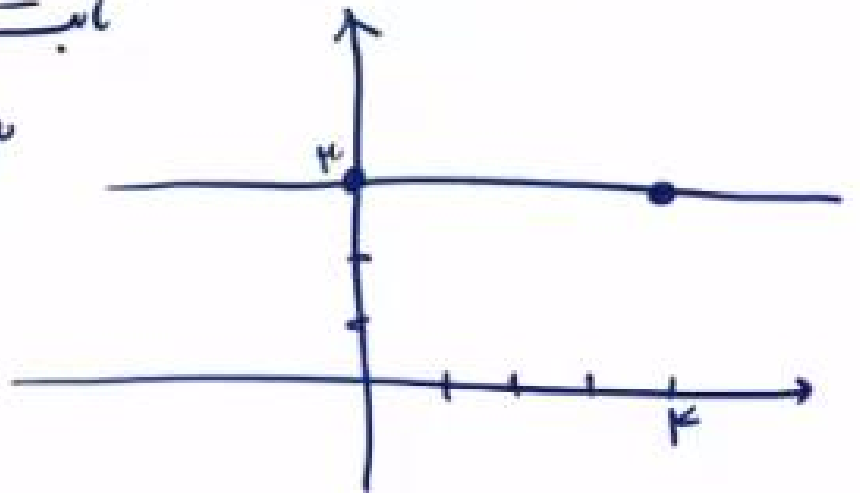
$$f(1000) = 3$$

مقادیر خط
 $m = \frac{3-3}{4-0} = 0$

ضریب درجه ۱

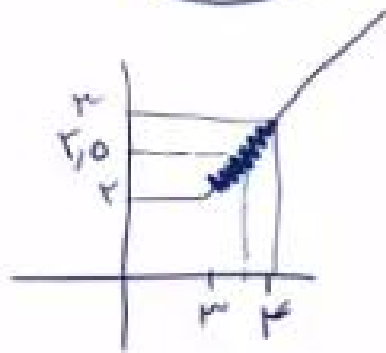
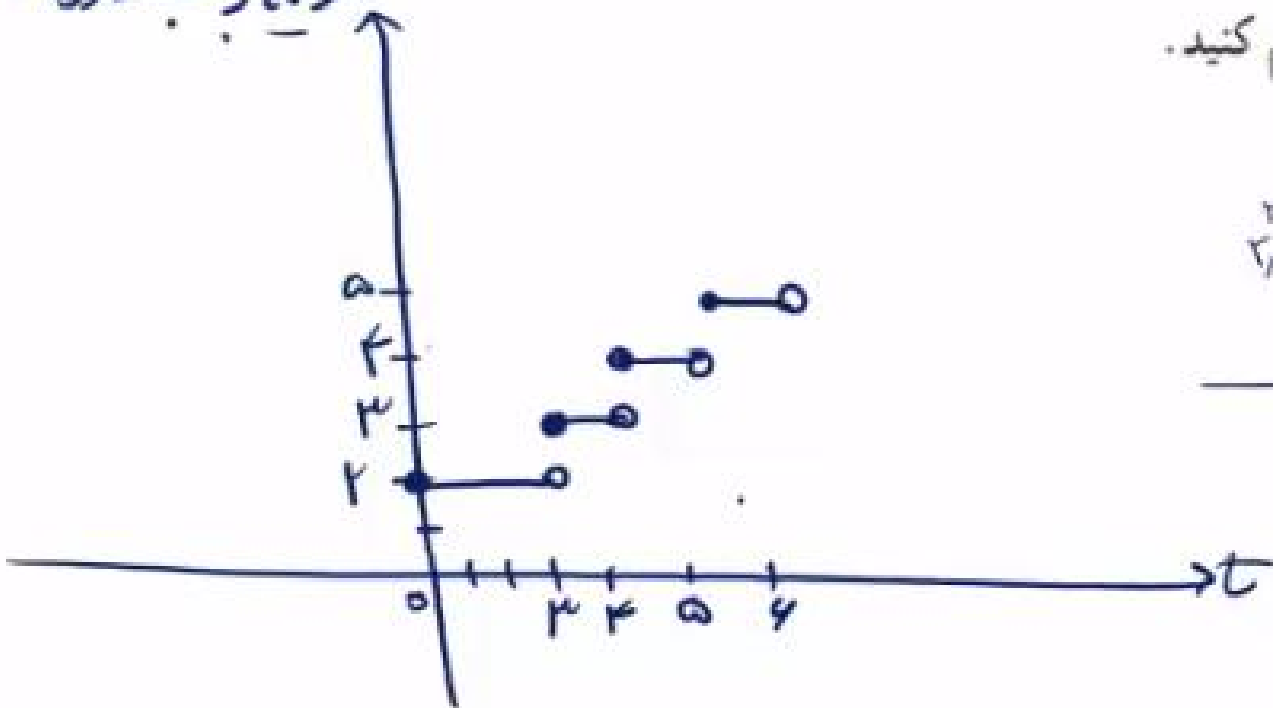
$$y = ax + b$$

$\{3\} = y$ ← ثابت
 $y = 3$



۹ هزینه مکالمه تلفنی با کشور دیگر، از زمان برقراری تماس برای ۳ دقیقه یا کمتر، ۲ هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزار تومان به هزینه آن اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان بیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را بر حسب زمان تا پایان زمان ۶ دقیقه رسم کنید.

هزینه حسب گذشتگان





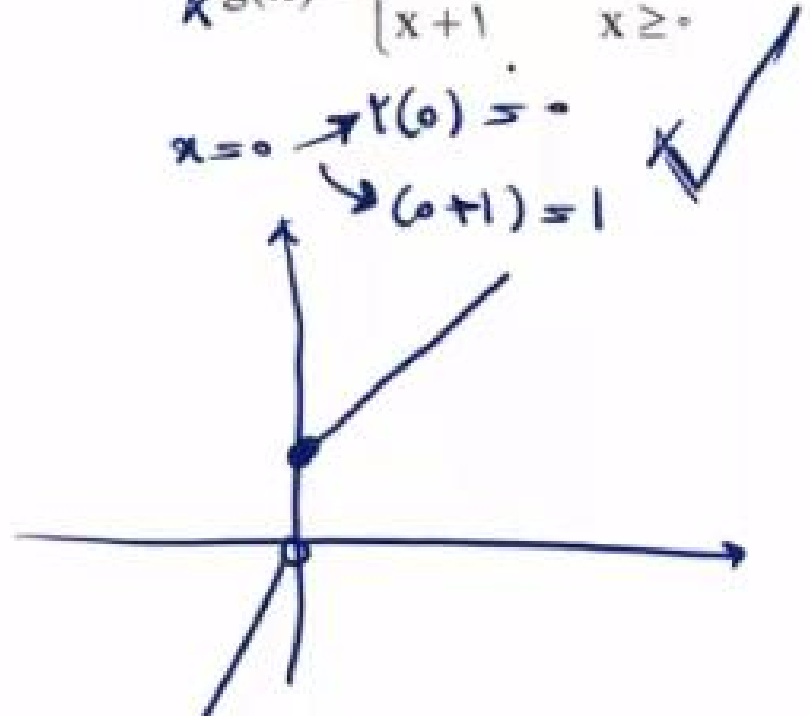
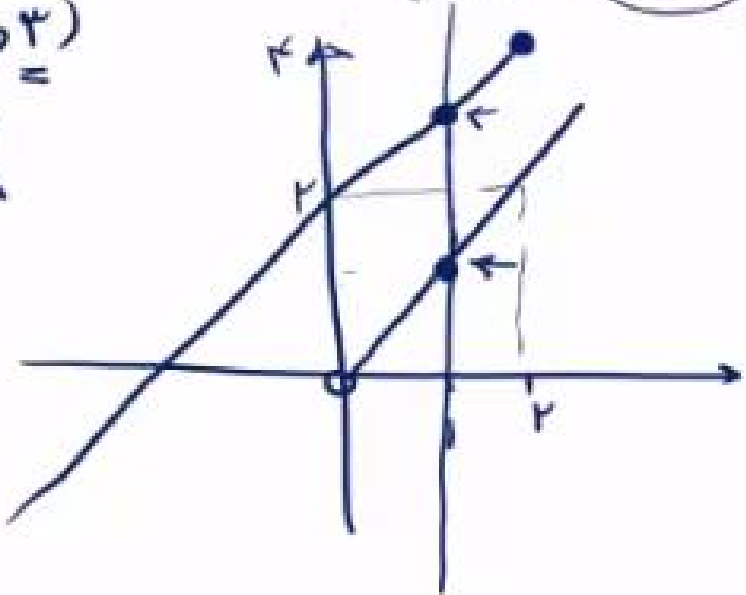
۱۰ کدام یک از رابطه‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید.

- ① شش‌ها با یکدیگر اسکرین برداشته باشند.
- ② اگر دو یک نقطه مشترک بودند آنها

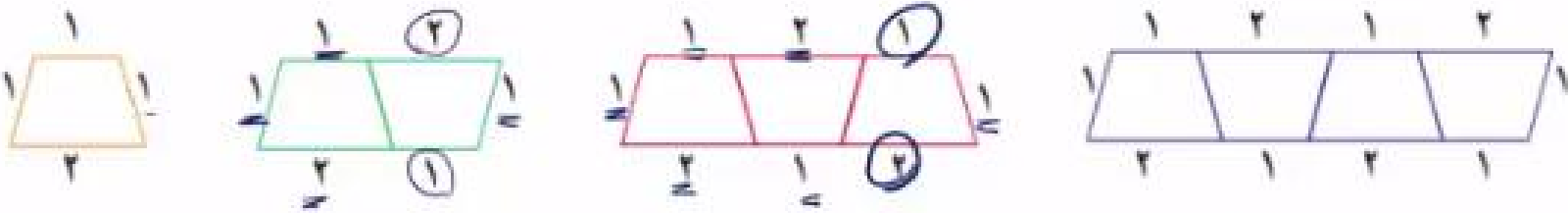
$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ x+2 & x \leq 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$x=1$
 $(1, 1)$
 $(1, 3)$
 \times

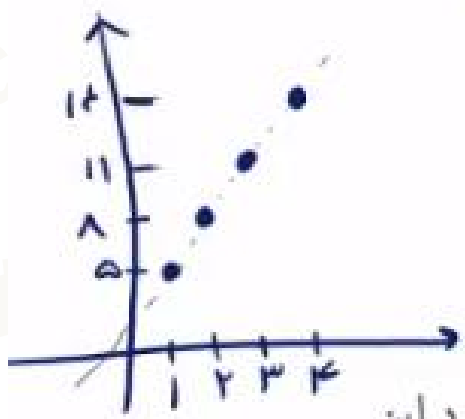


۱۱ الگوی زیر از تعدادی دوزنقه تشکیل شده است.



الف) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n	$D=N$
محیط شکل	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۷	$3n+2$	$R=\{5, 8, \dots\}$



ب) چرا رابطه بین تعداد دوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟ دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار آن را رسم کنید.

$$f(n) = 3n + 2$$



$$f(x) = ax^2 - 4x + 1$$

$$f(2) = -3 \quad f(1) = -2$$

$$f(0) = 1$$

۱۲ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(1, -2)$ و $(2, -3)$ می‌گذرد و محور y را در نقطه $(0, 1)$ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

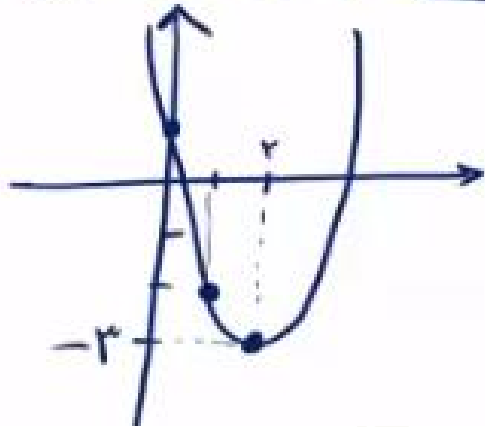
$$a(1)^2 + b(1) + c = -2 \rightarrow a + b = -3$$

$$a(2)^2 + b(2) + c = -3 \rightarrow 4a + 2b = -3$$

$$a(0)^2 + b(0) + c = 1 \rightarrow \boxed{c=1}$$

$$\begin{cases} a + b = -3 \\ 4a + 2b = -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} D &= R \\ R &= [-3, +\infty) \end{aligned}$$



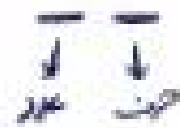
تمرین

۱) تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به دست آورید.
 مشخص کنید برای این کار از اصل جمع استفاده می‌شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.
 الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد (با) یک حرف الفبای فارسی است.

علا
 $10 + 22 = 32$

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینه اول یک عدد (و) گزینه دوم یک حرف الفبای فارسی است.

$10 \times 22 = 220$



ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینه دیگر یک حرف الفبای فارسی است.

حالت اول
 حرف عدد
 $\frac{22}{10} \times \frac{10}{22} = 220$

حالت دوم
 حرف عدد
 $\frac{10}{22} \times \frac{22}{10} = 220$

$220 + 220 = 440$

ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که (با) هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی‌اند.

$10^2 + 22^2 =$

حالت اول
 عدد عدد
 $10^2 = 10 \times 10$

حالت دوم
 حرف حرف
 $22^2 = 22 \times 22$

ث) این رمز از ۲ گزینه تشکیل شده است که دو گزینه اول اعداد غیر تکراری و دو گزینه دوم حروف انگلیسی غیر تکراری‌اند.

$9 \times 10 \times 9 \times 22$
 اعداد غیر تکراری حروف غیر تکراری



۲ در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲ تا ۳ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشند، چند تا است؟

۵ = بلوار <

۱۰ < ضیق < ۸

۱۲ < کوچه < ۱۰

۳ < کارخانه < ۵

حداکثر کارخانه = $5 \times 8 \times 10 \times 3$

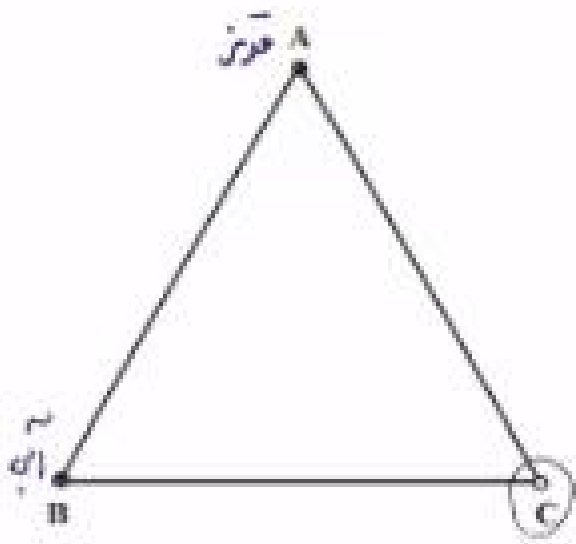
حداقل کارخانه = $5 \times 10 \times 12 \times 2$

۳ می خواهیم رأس های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.

$2 \times 2 \times 2 = 8$

الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟ هر رأس بصلت دارد
ب) به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه ای که رأس های که به هم وصل اند، هم رنگ نباشند. امکان ندارد

ب) هر دو قسمت الف) و ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می کنیم، بررسی کنید.
قرمز - آبی - نارنجی



الف) $3 \times 3 \times 3 = 27$

ب) $3 \times 2 \times 1 = 6$



۴ با بلاک‌هایی به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعه A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعه B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه C انتخاب شود، چند ماشین را می‌توان شماره گذاری کرد؟



$$A = \{11, 22, \dots, 99\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$C = \{ا, ب, م, ن, ز, م, ل, ق, ط, ح, س, ع, ج, پ\}$$

عدد درستی	عدد اشتباهی	تعداد	؟	9×13
9×9	13	$9 \times 9 \times 9 \times 9$		

۵ در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می‌شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می‌شود؟

ب) اگر یکی از رنگ‌های تولید شده مشکلی باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکلی تولید می‌شود؟

پ) چند نوع از این اتومبیل **مشکی** دنده **اتوماتیک** تولید می‌شود؟

دنده هم رنگ مدل

$$5 \times 10 \times 3 \times 2 = 300$$

↓

$$5 \times 1 \times 3 \times 2 = 30$$

↓

$$5 \times 1 \times 3 \times 1 = 15$$



۶ یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۲ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:

الف) اگر مجبور باشد به همه سؤال‌ها جواب دهد؟

$$\frac{\text{۵ سؤال}}{2 \times 2 \times \dots \times 2} \times \frac{\text{۱۰ سؤال}}{2 \times 2 \times \dots \times 2}$$

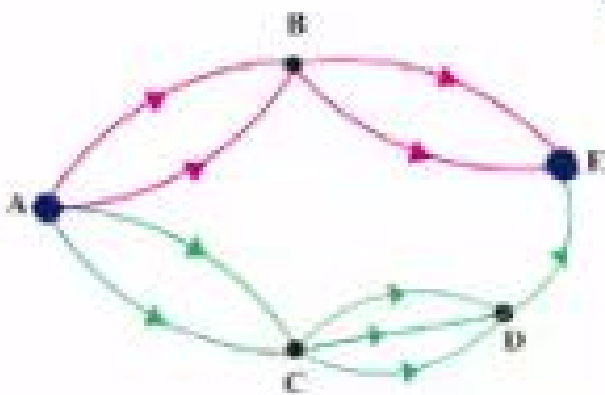
$$\text{جواب} = 2^5 \times 2^{10} = 2^5 \times (2^2)^5 = 2^5 \times 2^{10} = 2^{15}$$

ب) بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

$$\frac{\text{۵ سؤال}}{3 \times \dots \times 3} \times \frac{\text{۱۰ سؤال}}{5 \times 5 \times \dots \times 5}$$

$$\text{جواب} = 3^5 \times 5^{10}$$

۷ اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟



از طریق جاده‌های صورتی $\rightarrow 2 \times 2 = 4$

از طریق جاده‌های سبز $\rightarrow 2 \times 2 \times 1 = 4$

$4 + 4 = 8$



مسئله زیر را به گونه ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.
 مسئله: چند عدد دورقمی زوج می توان نوشت؛ به طوری که دهگان آن عدد فرد کوچکتر از... باشد.

حل: تعداد راه های نوشتن یکان برابر ۵ تا است و تعداد راه های نوشتن دهگان برابر ۴ تا است. لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.



مسئله ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و با هر دوی آنها حل شود و جواب آن به صورت زیر باشد.

$$\frac{2 \text{ سوال} - 2 \text{ سوالاتی که} 2 \text{ سوال} \text{ آزمون} \text{ است}}{2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 35}$$

شخصی از بین تعداد آزمون پیش رو به یکی شرکت

کند. یکی از آزمون ۳ سوال ۲ نوبتهای در آزمون دیگر ۳ سوال ۳ نوبتهای است و شخص مجبور است به تمام سوالات پاسخ دهد.



تمرین

۱ در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

اول	دوم	سوم	
a	b	c	abc
b	a	c	bac
			acb
			abc

راهنما: $18 \times 17 \times 16$

$$P(18, 3) = \frac{18!}{15!}$$

$$= \frac{18 \times 17 \times 16 \times \cancel{15!}}{\cancel{15!}}$$

۲ از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار 210 تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند تا است؟

$$P(n, 3) = 210$$

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 210$$

$$n=5 \quad \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 30 \times$$

$$n=4 \quad \frac{4!}{1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 120 \times$$

$$\textcircled{n=7} \quad \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210 \quad \checkmark$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(\cancel{n-3})!}{(\cancel{n-3})!}$$

$$n(n-1)(n-2) = 7 \times 6 \times 5$$

$$\boxed{n=7}$$



$$7x = 2x + 5x$$

کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$$7x \times 5x \times 2x \times 2x \times 1$$

$$6! = 6 \times 5!$$

$$7x \times 5x \times 2x \times 2x \times 1$$

$$2 \times 3! = 6!$$

$$24 = 4! + \frac{8!}{2!} \quad 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$7! = 7 + 7$$

$$6! = 3! \times 3! \quad \times$$

$$8 \times 5 \times 5 = 8! = 4! \times 2! \quad \times$$

$$\frac{(3!)^2}{24} = 9! \quad \times$$

$$2! = 2$$

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$4! = 4 \times 3! = 24$$

$$5! = 5 \times 4! = 120$$

$$6! = 6 \times 5! = 720$$

$$7! = 7 \times 6! = 5040$$

abc

در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای **۲۰ کلید** است، برای انجام یک دستور

خاص باید سه کلید مشخص با **رتیبی مشخص** فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید

مورد نظر کدام اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید **۲ ثانیه**

زمان بخواهد، این فرد **حداکثر (در بدترین حالت)** در چه زمانی می تواند دستور مورد نظر را

اجرا کند؟

$$abc \rightarrow 2^5 \text{ کمترین زمان ممکن}$$

$$P(20,3) = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!} = 6840 \text{ تا عدد سه رقمی}$$

$$6840 \times 2 = 13680 \text{ S}$$



ک ل پ ی گ

۵ با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها با «گل» شروع می شود؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت؟ $P(6,4) = \frac{6!}{2!} = 360$

پ) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

$5! \times 2!$

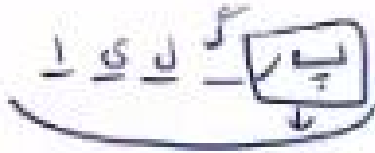
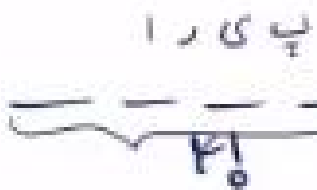
ت) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

$3 \times P(4,2)$

ث) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

$4! = 2 \times 4! = \frac{2}{1} \times \frac{5!}{4!}$
 $4! = 4! \times 2 = \frac{5!}{1} \times \frac{2}{4}$

۹۶ حالت





تمرین

۱ یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه کدو، تخمه ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می تواند درست کند؟

$$\begin{aligned} & \text{نوع ۷} \quad | \quad \text{نوع ۶} \quad | \quad \text{نوع ۵} \\ & \begin{pmatrix} ۷ \\ ۵ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۷ \\ ۲ \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} ۷ \\ ۵ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۷ \\ ۶ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۷ \\ ۷ \end{pmatrix} = \frac{۷ \times ۲^۳}{۲ \times ۱} = ۲۱ \\ & = ۲۲ + ۷ + ۱ \\ & = ۲۹ \end{aligned}$$

۲ یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه ای (۵ نفره) جهت بررسی و تصویب آخرین طرح های پیشنهادی برگزار کند. به چند

طریق این گروه ۵ نفره می تواند انتخاب شود، هر گاه: ۱۸

الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

$$\begin{aligned} & \text{الف) } \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۳ \\ ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱۴ \\ ۳ \end{pmatrix} \\ & \text{ب) } \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۳ \\ ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۳ \\ ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱۱ \\ ۲ \end{pmatrix} \\ & \text{ب) } \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۳ \\ ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۲ \\ ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۳ \\ ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۹ \\ ۱ \end{pmatrix} \end{aligned}$$



۳ در یک کلاس تعدادی از دانش آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

$$\binom{n}{2} = 28 \rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 28 \rightarrow \begin{cases} n=8 \\ n=-7 \text{ غلط} \end{cases}$$

۴ گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می دهد. او چند دسته گل مختلف می تواند درست کند؟

$$\begin{aligned} & \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} + \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= 120 + 210 + 252 \\ &= 582 \end{aligned}$$

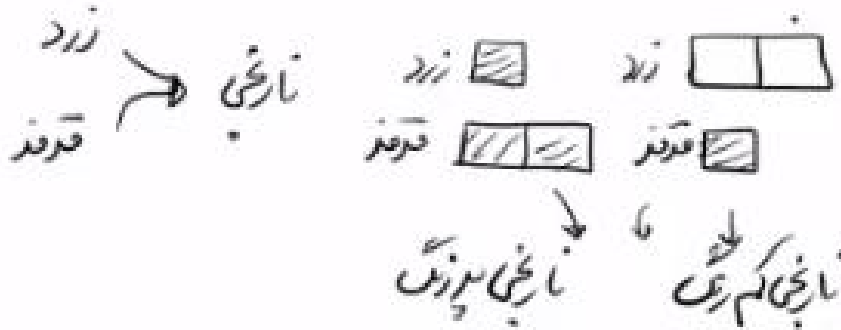
$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 7 \\ \hline 252 \\ 230 \end{array}$$



۵ یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ (قرمز، آبی، زرد و مشکی) دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11$$

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟



۶ هفت نقطه A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$



۷ یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص

درست می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند هر گاه

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه ها نداشته باشد؟

الف) $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی توانند استفاده شوند؟
 اصل از طره استیجانه شود $\binom{8}{2} = 28$
 $16 + 28 = 42$
 ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی توانند استفاده شوند؟
 a و b

پ) a, b, c و ۷

پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

۱ ادویه انتخاب $\binom{7}{1} = 7$
 ۲ ادویه انتخاب $\binom{6}{2} = 15$
 ۳ ادویه انتخاب $\binom{4}{3} = 4$
 $7 + 15 + 4 = 26$
 اصل از این ۳ ادویه استفاده شود

ت) ادویه ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می شوند که هیچ یک از ادویه های دسته اول با $\binom{5}{2} = 10$ ادویه های دسته دوم سازگاری ندارند؟

$\binom{5}{4} + \binom{5}{3} = 5 + 10 = 15$

۸ مسئله ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با: الف) ۵ دانش آموز سال اول و ۴ دانش آموز سال دوم داریم. اگر ۵ نفر

را انتخاب کنیم به چند روش ۳ نفر از سال اولی ها یا ۲ نفر از سال دوم ها می توان انتخاب کرد.

الف) $\binom{6}{2} \times \binom{5}{3}$

ب)

به چند طریق می توان ۳ نفر کلاس اولی یا ۲ نفر کلاس دومی برای اردو انتخاب کرد

ب) $\binom{6}{2} + \binom{5}{3}$

۲، ۳، ۴، ۸، ۱۰

۱ هر یک از اعداد طبیعی و زوج کوچکتر از ۱۱ را روی یک کارت می‌نویسیم و یکی از این کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم:

$$S = \{ ۲, ۳, ۴, ۸, ۱۰ \}$$

↓
مجموعه = عضو

زیرمجموعه = A

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش با پدیده تصادفی را مشخص کنید.

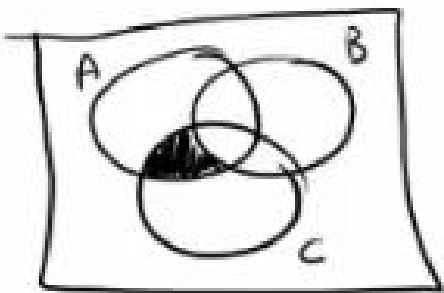
ب) چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟ A

پ) پیشامد A را که در آن «عدد روی کارت انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد»، مشخص کنید.

$$A = \{ ۴, ۸ \}$$

۲ فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. هر یک از عبارات‌های توصیفی زیر را با نمودار ون نمایش دهید و

هانسور بزنید.

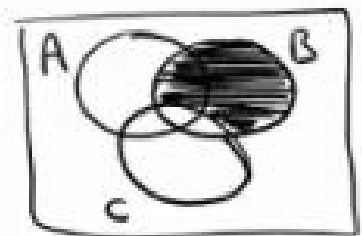
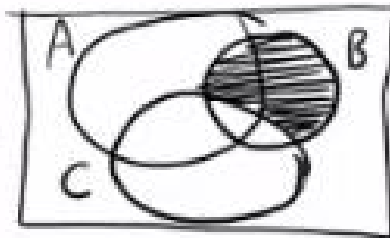
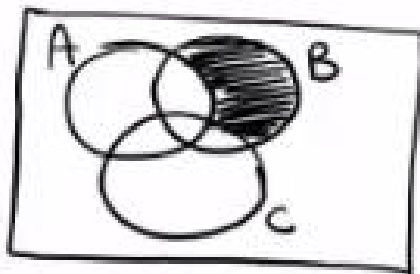


الف)

الف) پیشامدهای $A \cap C$ رخ بدهند؛ ولی B رخ ندهد.

ب) فقط پیشامد B رخ بدهد.

پ) پیشامد B رخ بدهد و C رخ ندهد.





۳ هر يك از ارقام ۱ تا ۸ را روی يك کارت می نویسیم و آنها را در يك كيسه قرار می دهیم؛ سپس يك کارت به تصادف از كيسه خارج می کنیم. هر يك از پیشامدهای زیر را تعیین کنید:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

الف) فضای نمونه‌ای و پیشامد A که در آن «عدد روی کارت زوج باشد».

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

ب) پیشامد B که در آن «عدد روی کارت اول باشد».

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

پ) پیشامد C که در آن «عدد رو شده بزرگ‌تر از ۲ باشد».

$$C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

۴ خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید. $2 \times 2 \times 2 = 8$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (د \ د \ د) \ (د \ د \ پ) \ (د \ پ \ د) \ (د \ پ \ پ) \\ (پ \ د \ د) \ (پ \ د \ پ) \ (پ \ پ \ د) \ (پ \ پ \ پ) \end{array} \right\}$$

$$A = S - \{(پ \ پ \ پ)\}$$



۵ سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سکه دیگر را می‌اندازیم: الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.

پ) پیشامد آنکه «حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید.

احتمال حاصل شود
سکه دوم

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (پ_۱) (پ_۲) (پ_۳) (پ_۴) (پ_۵) (پ_۶) \\ (ر_۱) (ر_۲) (ر_۳) (ر_۴) (ر_۵) (ر_۶) \end{array} \right\}$$

$$A = \{ (پ_۲) (پ_۴) (پ_۶) \}$$

$$B = \{ (ر_۱) (ر_۲) (ر_۳) (ر_۴) (ر_۵) (ر_۶) \}$$

۶ می‌خواهیم از بین ۳ دانش‌آموز کلاس دهم رشته ریاضی و ۲ دانش‌آموز دهم رشته تجربی یک تیم دو نفره تیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟

ب) هر دو نفر، هم‌رشته باشند؟

پ) ۱ نفر از رشته ریاضی و ۱ نفر از رشته تجربی باشد؟

$$n(S) = \binom{5}{2} = 10$$

$$\text{الف) } n(A) = \binom{3}{2} = 3 \quad P(A) = \frac{3}{10}$$

$$\text{ب) } n(B) = \binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 3 + 1 = 4 \quad P(B) = \frac{4}{10}$$

$$\text{پ) } n(C) = \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 3 \times 2 = 6 \quad P(C) = \frac{6}{10}$$



۷ یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می‌پذیرد. اگر ۳۴ درصد از مشتریان کارت نوع A $P(A) = \frac{34}{100}$ و ۶۲ درصد کارت نوع B و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

$$P(A) = \frac{34}{100}$$

$$P(B) = \frac{62}{100}$$

$$P(A \cap B) = \frac{15}{100}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{34}{100} + \frac{62}{100} - \frac{15}{100}$$

$$= \frac{81}{100}$$

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2$

۸ اگر ۷ نفر که دو نفر آنها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد:

الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟ $\leftarrow P(A) = 1 - P(A')$

ب) یکی از آنها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

$$n(S) = 7!$$

$$n(A') = 2! \times 4! \quad (b_1, b_2) \quad a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$$

$$P(A') = \frac{2 \times 4!}{7!} = \frac{2 \times 4!}{7 \times 6!} = \frac{2}{7}$$

$$P(B) = \frac{2 \times 5!}{7!}$$

$$= \frac{2 \times 5!}{7 \times 6 \times 5!} = \frac{1}{21}$$





اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $A \subseteq B$ ، ثابت کنید، $P(A) \leq P(B)$

اسازگارند (همچون اشتراکی ندارند)

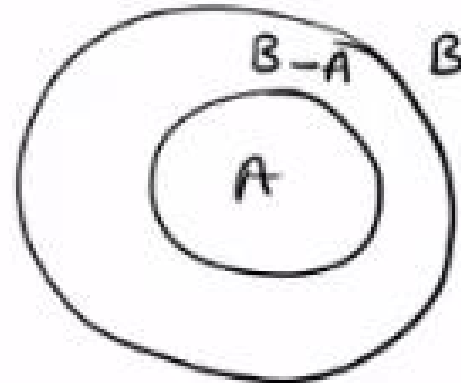
$$B = (B - A) \cup A$$

$$P(B) = P(B - A) + P(A)$$

$$P(B) - P(A) = \underbrace{P(B - A)}_{\geq 0}$$

$$P(B) - P(A) \geq 0$$

$$P(B) \geq P(A) \quad \checkmark$$





۱ می خواهیم درباره **کیفیت محصولات تولیدی** یک کارخانه، تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور، از تعداد کل قطعات تولید شده در کارخانه که برابر با ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را

جامعه	اندازه جامعه	اندازه نمونه	ویژگی مورد بررسی
کلیه قطعات تولید شده	۱۰۰۰۰	۱۰۰	کیفیت محصولات تولیدی

۲ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

نادرست

الف) اندازه جامعه کمتر از اندازه نمونه است

نادرست

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه اند

درست

پ) نمونه زیر مجموعه ای از جامعه است

۳ در شکل زیر، دانش آموزان یک مدرسه در صف صبحگاهی مشاهده می شوند.

جامعه: کل دانش آموزان مدرسه

اعضای جامعه: هر یک از دانش آموزان مدرسه

نمونه:

الف) دانش آموزانی که یکان کد ملی آنها مضرب ۳ باشد.

ب) دانش آموزانی که ماه تولد آنها زوج باشد.



۱ با پر کردن جاهای خالی، اسمی یا ترتیبی بودن متغیرهای زیر را مشخص کنید.

- | | |
|--|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> ترتیبی | <input type="checkbox"/> اسمی |
| <input type="checkbox"/> ترتیبی | <input checked="" type="checkbox"/> اسمی |
| <input type="checkbox"/> ترتیبی | <input checked="" type="checkbox"/> اسمی |
| <input checked="" type="checkbox"/> ترتیبی | <input type="checkbox"/> اسمی |

الف) مراحل رشد یک انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان سال، کهن سال)

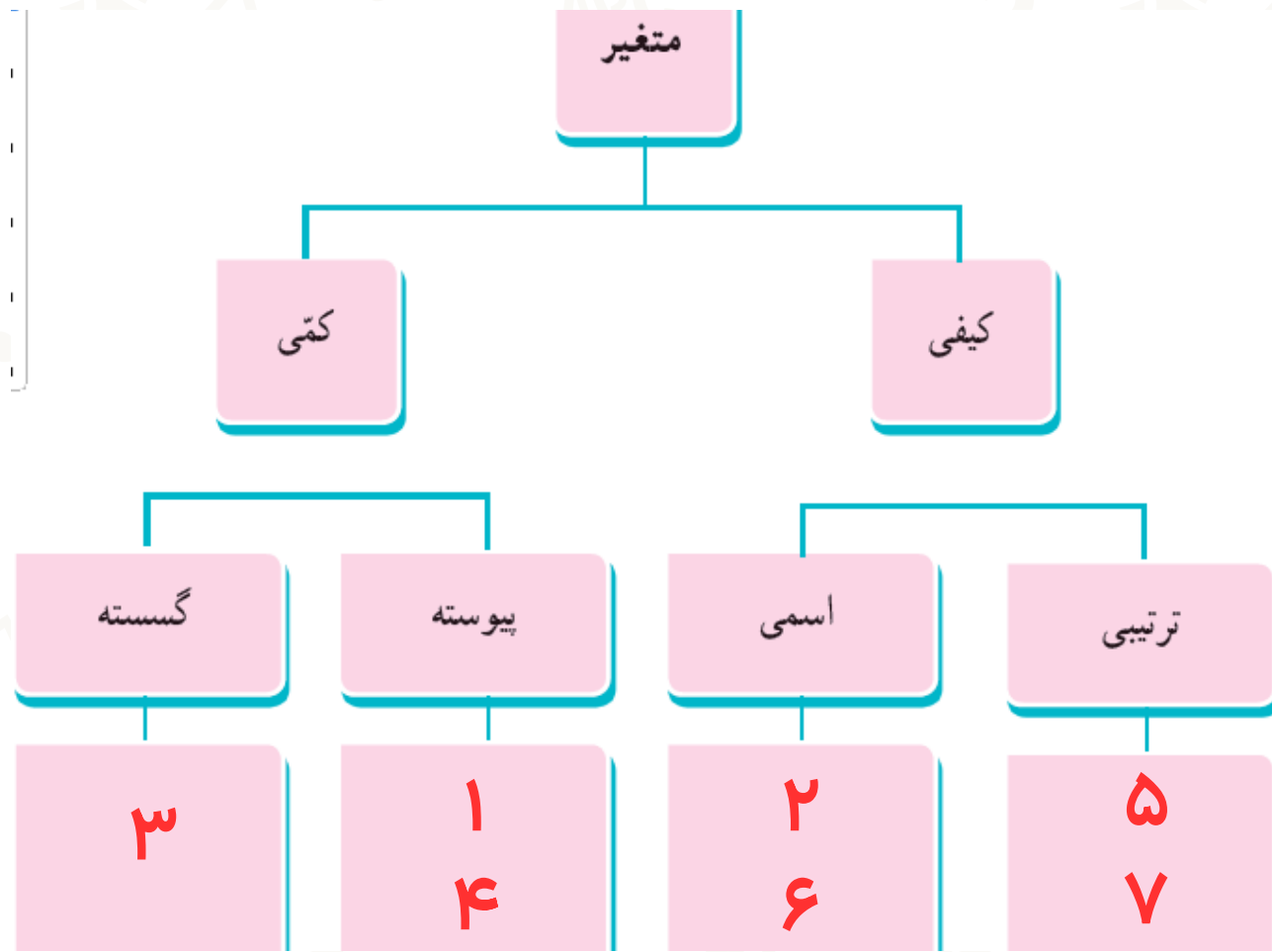
ب) نژاد افراد (سفید پوست، زرد پوست، سیاه پوست)

پ) رنگ موی افراد (مشکی، قهوه‌ای، طلایی)

ت) کیفیت میوهٔ هلو (درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳)

۲ نوع متغیرها را در نمودار زیر، دسته‌بندی کنید.

نوع متغیر	متغیر
کمی پیوسته	۱- میزان بارندگی بر حسب سانتی متر در یک شهر
کیفی اسمی	۲- نوع بارندگی (باران، برف)
کمی گسسته	۳- تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند
کمی پیوسته	۴- میزان دمای هوا
کیفی ترتیبی	۵- شدت آلودگی هوا (زیاد، متوسط، کم)
کیفی اسمی	۶- انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)
کیفی ترتیبی	۷- شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)



۳ جدول زیر متغیرهای دانش‌آموزان را نشان می‌دهد. انواع متغیرها از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی را در جدول زیر کامل کنید.

متغیرهای دانش‌آموزان	متغیر کمی	متغیر کیفی	متغیر گسسته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی	متغیر اسمی
سن	×			×		
نمرهٔ ریاضی نهم	×		×			
جنسیت (دختر و پسر)		×				×
قد	×			×		
وزن	×			×		
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)		×			×	
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)		×			×	
شاخص تودهٔ بدن	×			×		



۴ فرض کنید وزن شخصی ۹۵ کیلوگرم و قد او ۱۶۰ سانتی متر باشد.

الف) شاخص توده بدن این شخص را حساب کنید.

$$\frac{۹۵}{(۱/۶)^۲} = ۲۷ / ۱۰$$

ب) شاخص توده بدن شخص چه نوع متغیری از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، اسمی و ترتیبی است؟

کمی پیوسته

۵ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ است. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ سفید را با عدد ۲ و رنگ قرمز را با

عدد ۱ نشان دهیم، جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید. این شکل چه چیزی است؟

؟	؟	؟
؟		؟
	؟	؟

شکل

۳؟	۳	۳
۲	۲؟	۲
۱؟	۱	۱

جدول عددی

۶ جامعه و نمونه را تعریف کنید و برای هر یک مثال بزنید.

جامعه: مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آنها

تحقیق صورت گیرد. مانند دانش آموزان یک

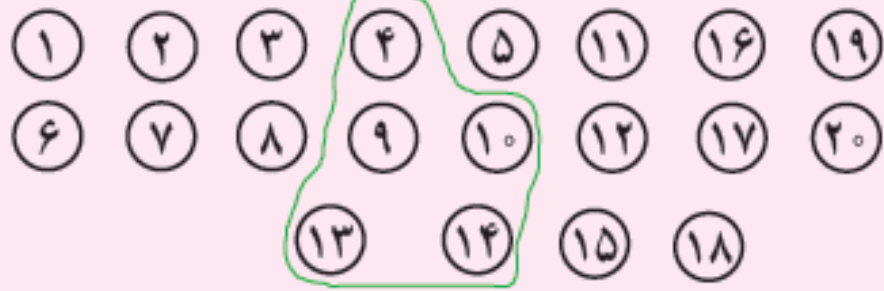
نمونه: بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب شود. مانند دانش

آموزان یک کلاس که به عنوان یک نمونه از دانش آموزان مدرسه

هستند.



۷ شکل زیر یک جامعه فرضی را نشان می‌دهد که اعضای آن را با شماره‌های ۱ تا ۲۰ مشخص کرده‌ایم. همچنین اعضای نمونه با خط سبز رنگ انتخاب شده‌اند. به سوالات زیر پاسخ دهید:



الف) اندازه جامعه چه عددی است؟ **۲۰ نفر**
 ب) اندازه نمونه انتخابی چه عددی است؟ **۵ نفر**
 پ) اعضای نمونه انتخابی را بنویسید.
{۱۴, ۹, ۱۰, ۱۳, ۱۴}

۸ جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	نوع متغیر
وزن یک هلو	کمی پیوسته
کیفیت یک هلو	کیفی ترتیبی
اندازه طول بدن یوزپلنگ ایرانی	کمی پیوسته
اقوام ایرانی	کیمی اسمی
وضعیت آب و هوا	کیفی اسمی
دمای هوا در قله	کمی پیوسته
فشار هوا در قله کوه	کمی پیوسته

سایت بخون
همیشه رایگان



گام به گام



نمونه سوال



جزوه



فیلم آموزشی



مشاوره



برنامه ریزی



www.bekhun.com

کلیک کنید

