

ریاضی

۱۱



نمونہ سوالات تشریحی  
فصل ۶ (تجربی)

 bekhunofficial



نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: جمع‌بندی تشریحی حد و پیوستگی  
یازدهم تجربی

۱. حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow \pi} [\sin x]$       ب)  $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x]$

۲. حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - 1}$       ب)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}$

۳. مقدار  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که حد تابع زیر در  $x = 0$  برابر ۲ باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x+1] + b & x > 0 \\ \frac{ax}{\sqrt{x^3 + x^2}} & x < 0 \end{cases}$$

۴. حدود زیر را بیابید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + [x]}{x^2 - 2}$       ب)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x - [-x]}{2x + [x]}$

۵. اگر تابع  $f(x) = \frac{ax + 4}{x^2 + x - 6}$  وقتی  $x \rightarrow 2$  دارای حد باشد، حاصل این حد را بیابید.

۶. حدهای زیر را محاسبه کنید. [ ] نماد جزء صحیح است.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{[x] + [-x]}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - x}$

۷. اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + b}{|x - 1|} = 2$  آن گاه  $a$  و  $b$  را بیابید.

۸. اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax - 2a}{\sqrt{3x} - 5 - 1} = 3$  آن گاه  $a$  را بیابید.

۹. حدهای زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3}{|[x] + [-x]|}$

۱۰. حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3 - [x])\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x^2 - 9}$       ب)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{\sqrt{x+2} - 2}$

۱۱. اگر  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2$  آن گاه  $a$  را بیابید.

۱۲. حد تابع زیر را در بیابید.

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{2x^2 + 2x}$

۱۳. اگر  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + b}{x^3 + 8} = 4$ ، مقادیر  $a$  و  $b$  را بیابید.

۱۴. دو تابع  $f, g$  مثال بنزید که در اطراف صفر تعریف شده‌اند و هیچ کدام در صفر حد ندارند ولی  $f+g$  در صفر حد دارد.

۱۵. مقدار  $a$  را چنان بیابید که تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = a[x] + [x+1]$  در نقطه‌ی  $x_0 = -1$  حد داشته باشد.





۱۶ پیوستگی تابع مقابل را در نقطه  $x = \frac{\pi}{4}$  بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} a[\tan x] + x & x < \frac{\pi}{4} \\ \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + a & x = \frac{\pi}{4} \\ b \cos[\frac{x}{\pi}] & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

۱۷ تابع  $f$  با ضابطه زیر در نقطه  $x_0 = 3$  پیوسته است.  $a+b$  را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 9|}{x - 3} + ax + 5 & x < 3 \\ 2 & x = 3 \\ \frac{2x - 6}{x^2 - 5x + 6} + bx & x > 3 \end{cases}$$

۱۸ مقادیر  $a$  و  $b$  را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطه  $x_0 = 2$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} [-x] + a & x < 2 \\ 3 & x = 2 \\ \frac{|x^2 - 4|}{x - 2} + b & x > 2 \end{cases}$$

۱۹ مقادیر  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که تابع با ضابطه زیر در نقطه  $x_0 = 1$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} [3x] + b & x < 1 \\ 2ax + 1 & x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{1 - x} & x > 1 \end{cases}$$

۲۰  $m$  را چنان بیابید که تابع زیر در نقطه  $x = 2$  حد داشته باشد.

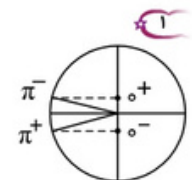
$$f(x) = \begin{cases} mx - [2x] & x < 2 \\ [-x] + x & x \geq 2 \end{cases}$$

۲۱ پیوستگی تابع  $f(x) = [\frac{x}{3}] - [\frac{x+2}{3}]$  را در نقطه  $x = 4$  بررسی کنید.

۲۲ پیوستگی تابع  $f(x) = \sqrt{1-x}$  را در نقطه  $a = 1$  بررسی کنید.

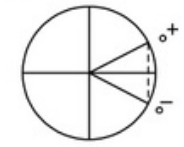


# پاسخنامه تشریحی



$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} [\sin x] = [0^+] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} [\sin x] = [0^-] = -1 \Rightarrow$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x] = [1^-] = [1 - \epsilon] = 0$$

الف)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1 - 2x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1) - 2(x+1)}{x^2 - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1 - 2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 1}{x-1} = \frac{1+1-1}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + 2x - 2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) + 2(x-1)}{x^2 + x - 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1 + 2)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 3}{x+2} = \frac{5}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} a[x+1] + b & x > 0 \\ \frac{ax}{\sqrt{x^2 + x^2}} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} a[x+1] + b & x > 0 \\ \frac{ax}{|x|\sqrt{x+1}} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} a[x+1] + b & x > 0 \\ \frac{-a}{\sqrt{x+1}} & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (a[x+1] + b) = a[1^+] + b = a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-a}{\sqrt{x+1}} = -a$$

$$-a = 2 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$a + b = 2 \Rightarrow -2 + b = 2 \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + [x]}{x^2 - 2} = \frac{4 + [2 - \epsilon]}{4 - 2} = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x - [x]}{2x + [x]} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5 - [-(1 + \epsilon)]}{2 + 1} = \frac{5 - [-1 - \epsilon]}{3} = \frac{5 - (-2)}{3} = \frac{7}{3}$

زمانی که  $x \rightarrow 2$  مخارج تابع  $f(x)$  صفر می شود، پس باید صورت هم صفر شود تا مبهم صفر صفر ایجاد شود پس داریم:

$$ax + 4 = 0 \xrightarrow{x=2} 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x + 4}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{x+3} = \frac{-2}{5}$$

جمع بندی تشریحی حد و پیوستگی یازدهم تجربی

۶  
(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{[x]+[-x]} = \frac{0^+}{-1} = 0$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

توجه کنیم که چون  $3^+ \notin \mathbb{Z}$ ، بنابراین مقدار تابع  $[x] + [-x]$  در همسایگی راست  $x = 3$  برابر  $-1$  است.  
(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - x} = \frac{0}{0}$$

عامل ابهام  $(x-1)$  است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 + 2x + 1)(x-1)}{x(x-1)} = \frac{5}{1} = 5$$

۷ چون  $x \rightarrow 1^-$  مخرج را صفر می کند باید صورت کسر را هم صفر کند تا مبهم صفر صفرم ایجاد شود و حاصل حد پس از رفع ابهام برابر ۲ شود.

$$ax^2 + b = 0 \xrightarrow{x=1} a + b = 0 \Rightarrow b = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax^2 - a}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -a(x+1) = -2a = 2 \Rightarrow a = -1, b = 1$$

۸

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax - 2a}{\sqrt{3x-5}-1} \times \frac{\sqrt{3x-5}+1}{\sqrt{3x-5}+1} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)(\sqrt{3x-5}+1)}{3x-5-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)(\sqrt{3x-5}+1)}{2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{2} (\sqrt{3x-5}+1) = \frac{2a}{2} = 2 \Rightarrow a = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

۹

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1} &= \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{x-1} = 9 \\ \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3}{||x|+[-x]|} &= \frac{-3}{|-1|} = \frac{-3}{1} = -3 \end{aligned}$$

نکته: همواره حد  $[x] + [-x]$  در هر نقطه برابر  $-1$  است.

۱۰

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)\sqrt{(x-3)^2}}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)|x-3|}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{x+3} = \frac{-1}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+6}-2}{\sqrt{x+2}-2} \times \frac{\sqrt{x+6}+2}{\sqrt{x+6}+2} &\times \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+6-4)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2-4)(\sqrt{x+6}+2)+2\sqrt{x+6}+4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+6}+2+2\sqrt{x+6}+4} \\ &= \frac{2+2}{4+2+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

۱۱

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{a(x+3)}{1-\sqrt{5x+16}} \times \frac{1+\sqrt{5x+16}}{1+\sqrt{5x+16}} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{a(x+3)(1+\sqrt{5x+16})}{1-5x-16} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2a(x+3)}{-5(x+3)} = -\frac{2a}{5} = 2 \Rightarrow a = -5 \end{aligned}$$

۱۲

عامل ابهام  $x+1$  است.  
صورت و مخرج را در  $(\sqrt{x+2}+1)$  ضرب می کنیم.

جمع بندی تشریحی حد و پیوستگی یازدهم تجربی

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{2x(x+1)} \times \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2-1}{2x(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)}{2x(x+1)(\sqrt{x+2}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2x(\sqrt{x+2}+1)} = \frac{1}{-2 \times 2} = -\frac{1}{4}$$

۱۳

از آنجائیکه  $x \rightarrow -2$  مخرج کسر را صفر می کند پس باید صورت کسر هم صفر شود تا مبهم صفر صفر تولید شود بنابراین داریم:

$$x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{x=-2} 4 - 2a + b = 0 \Rightarrow b = 2a - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + \lambda} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + 2a - 4}{x^2 + \lambda} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4 + ax + 2a}{x^2 + \lambda}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2) + a(x+2)}{x^2 + \lambda} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2+a)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2+a}{x^2 - 2x + 4} = \frac{-4+a}{12} = 4 \Rightarrow -4+a = 48 \Rightarrow a = 52$$

$$b = 2a - 4 = 2 \times 52 - 4 = 104 - 4 = 100 \Rightarrow b = 100$$

۱۴

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (f+g)(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (f+g)(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1$$

۱۵

برای اینکه  $f(x)$  در نقطه  $x = -1$  حد داشته باشد باید حد چپ و راست آن در این نقطه باهم برابر باشند.

$$f(x) = a[x] + [x+1]$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (a[x] + [x+1]) = -a + 0 = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (a[x] + [x+1]) = -2a - 1$$

$$\Rightarrow -a = -2a - 1 \Rightarrow a = -1$$

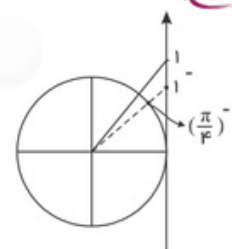
۱۶

$$L^- = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} a[\tan x] + x = a[1^-] + \frac{\pi}{4} = a \times 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} b \cos\left[\frac{x}{\lambda}\right] = b \cos\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^+\right] = b \cos 0 = b \times 1 = b$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left[\frac{1}{\lambda}\right] + a = \left[\frac{1}{\pi}\right] + a = 1 + a$$

$$b = \frac{\pi}{4}, 1 + a = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \frac{\pi}{4} - 1$$



۱۷

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-9|}{x-3} + ax + 5 & x < 3 \\ 2 & x = 3 \\ \frac{2x-6}{x^2-5x+6} + bx & x > 3 \end{cases}$$

$f(3)$  حد راست در  $3 =$  حد چپ در  $3$

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x-3)}{(x-3)(x-2)} + bx = 2 + 3b$$

جمع بندی تشریحی حد و پیوستگی یازدهم تجربی

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} + ax + 5 \right) = -6 + 2a + 5 = 2a - 1$$

$$f(2) = 2$$

$$2a - 1 = 2 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = 1.5$$

$$2 + 2b = 2 \Rightarrow b = 0$$

۱۸

$$f(x) = \begin{cases} [-x] + a & x < 2 \\ 2 & x = 2 \\ \frac{|x^2 - 4|}{x - 2} + b & x > 2 \end{cases}$$

۲ در حد چپ در ۲ حد راست در ۲

$$\text{حد راست} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} + b = 4 + b$$

$$\text{حد چپ} \lim_{x \rightarrow 2^-} [-x] + a = -2 + a$$

$$f(2) = 2$$

$$\begin{cases} 4 + b = 2 \rightarrow b = -2 \\ -2 + a = 2 \rightarrow a = 4 \end{cases}$$

۱۹

$$f(x) = \begin{cases} [3x] + b & x < 1 \\ 3ax + 1 & x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{1 - x} & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [3x] + b = 3 + b$$

$$f(1) = 3a + 1 \rightarrow \begin{cases} 3 + b = -2 \rightarrow b = -5 \\ 3a + 1 = -2 \rightarrow a = -1 \end{cases}$$

۲۰

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 2^-} mx - [2x] = 2m - [2(2 - \epsilon)] = 2m - [4 - 2\epsilon] = 2m - 4 + 2\epsilon$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-x] + x = [-(2 + \epsilon)] + 2 = [-2 - \epsilon] + 2 = -2 + \epsilon - 2 + 2 = -2$$

$$\Rightarrow 2m - 4 + 2\epsilon = -2 \Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1$$

$$f(2) = [2] - [2] = 0$$

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{x}{2} \right) - \left[ \frac{x+2}{2} \right] = \left( \frac{2-\epsilon}{2} \right) - \left[ \frac{2-\epsilon+2}{2} \right] = \left( 1 - \frac{\epsilon}{2} \right) - \left[ 2 - \frac{\epsilon}{2} \right] = 1 - 1 - \epsilon = -\epsilon$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{x}{2} \right) - \left[ \frac{x+2}{2} \right] = \left( \frac{2+\epsilon}{2} \right) - \left[ \frac{2+\epsilon+2}{2} \right] = \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \right) - \left[ 2 + \frac{\epsilon}{2} \right] = 1 - 2 = -1$$

تابع در نقطه  $x=4$  پیوسته است.

۲۲

$$f(x) = \sqrt{1-x} \rightarrow 1-x \geq 0 \rightarrow x \leq 1 \rightarrow D_f = (-\infty, 1]$$

چون تابع در همسایگی  $x=1$  تعریف نشده است پس حد نداشته و ناپیوسته است.

جمع بندی تشریحی حد و پیوستگی یازدهم تجربی



## سایت بکخون همیشه رایگان

فیلم آموزشی



مشاوره



برنامه ریزی



گام به گام



نمونه سوال



جزوه



کلیک کنید

[www.bekhun.com](http://www.bekhun.com)

