

ریاضی

۱۱



نمونہ سوالات تشریحی
فصل ۶ (تجربی)

 bekhunofficial



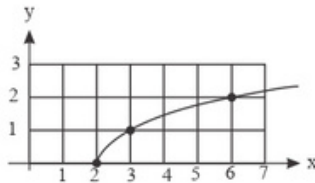
علی هاشمی

نام آزمون: حد و پیوستگی

سایت: www.alihashemi-math.com

کانال تلگرام: Freemath

۱) درباره تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x-2}$ موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:



- الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
 پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ت) $f(2)$

۲) حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

- الف) $\lim_{x \rightarrow 7} (-3)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} (-2x - 7)$ پ) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 4x + 5)$
 ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x^2 - x}$ ج) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 8}{x + 2}$
 چ) $\lim_{x \rightarrow -2} [x]$ ح) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$ خ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+7}$
 د) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$ ذ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+5}$ ر) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-2}$
 ز) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{[x]+1}$ ژ) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \cos x$ س) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)$
 ش) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{[x]}$ ص) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x}$ ض) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + [x])$

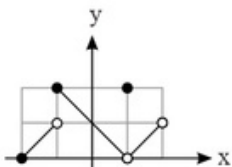
۳) اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -1$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

- الف) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + h(x))$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2} (h(x))^5$
 پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)}$
 ث) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x) - 5h(x)}$ ج) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{h(x)}$

۴) نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x-3 & x < 2 \\ -2 & x = 2 \\ -x+2 & x > 2 \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۵) پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} -2x+2 & x \leq 0 \\ x^2+2 & x > 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

۶) برای تابع f که نمودار آن داده شده است، کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟



- الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ ب) $f(1) = 2$
 پ) $f(2) = 1$ ت) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$
 ث) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$ ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$
 ج) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد. ح) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود ندارد.

علی هاشمی



۷ آیا حد تابع زیر در $x = 2$ موجود است؟

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x > 2 \\ -2 & x = 2 \\ x - 3 & x < 2 \end{cases}$$

۸ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 0 \\ -2x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را - در صورت وجود - بیابید.

۹ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. آیا f در نقطه صفر حد دارد؟ آیا $f(0)$ موجود است؟

۱۰ با توجه به توابع f و g و h با ضابطه‌های داده شده، به سوالات پاسخ دهید.

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = 2x + 1 \quad x \neq 2, \quad h(x) = \begin{cases} 2 + x & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

$$f(2) = \quad , \quad g(2) = \quad , \quad h(2) =$$

الف) مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) =$$

ب) حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید:

پ) کدام تابع در $x = 2$ پیوسته است؟

۱۱ مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطه ۲ مساوی ۱- باشد.

۱۲ تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطه ۳ حد نداشته باشد. $f(3) = 1$

۱۳ تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطه ۲ تعریف نشده باشد. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

۱۴ توابع زیر را در نظر بگیرید و به سوالات پاسخ دهید:

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = 2x + 1 \quad (x \neq 2), \quad h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

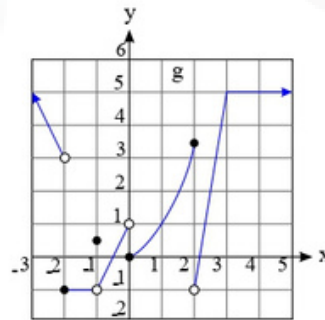
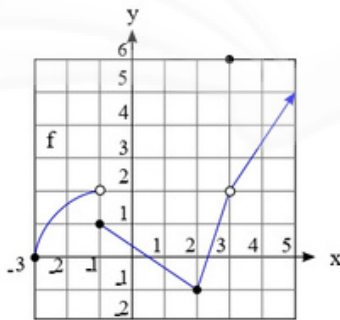
الف) مقادیر $f(2)$ ، $h(2)$ و $g(2)$ را در صورت وجود به دست آورید.

ب) حدهای زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

۱۵ اگر $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود است؟

۱۶ با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ پ) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x))$ ث) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x))$ ج) $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + 5g(x))$

چ) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^2$ ح) $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))^2$

خ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ د) $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) \cdot g(x))$

۱۷ دو تابع متفاوت مثال بزنید که در یک نقطه دارای حدهای برابر باشند.

حد و پیوستگی



علی هاشمی



۱۸) نمودار دو تابع $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ و $g(x) = 1$ را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ موجود است؟ (چرا؟) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ چطور؟ در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟

۱۹) در هر یک از حالت‌های زیر دربارهٔ حد تابع $f+g$ چه می‌توان گفت؟

الف) اگر توابع f و g هیچ‌کدام در نقطه‌ای مانند a حد نداشته باشند.

ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

۲۰) اگر m یک عدد صحیح باشد، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow m^+} [x]$

ب) $\lim_{x \rightarrow m^-} [x]$

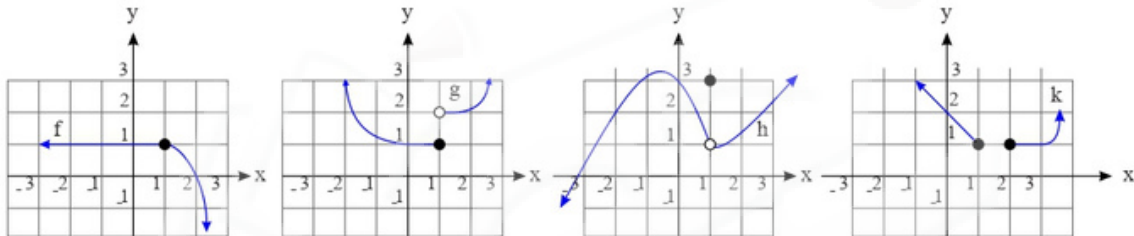
پ) $\lim_{x \rightarrow m} [x]$

۲۱) توابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ را در نظر می‌گیریم. پیوستگی این توابع را در $x = 3$ بررسی کنید.

۲۲) با توجه به نمودار تابع $f(x) = [x]$ ، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۲۳) تابعی مثال بنویسید که حد آن در نقطه $x = 1$ مساوی -1 باشد؛ ولی تابع در 1 پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.

۲۴) کدام یک از توابع زیر در $x = 1$ پیوسته است؟



۲۵) در مواقعی تجویز دارو برای کودکان بر اساس جرم کودک انجام می‌گیرد. روش‌های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب

کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی‌تواند اندازه‌گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش‌ها استفاده از تابع

$f(t) = \begin{cases} 6t+4 & 0 \leq t < 1 \\ 2t+10 & 1 \leq t \leq 10 \end{cases}$ است که در آن t سن کودک برحسب سال است. به طور مثال جرم یک کودک ۶ ماهه به کمک این تابع چنین محاسبه می‌شود:

$$\text{سال } \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{۶ ماه} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 7$$

الف) $f(2)$ و $f(5)$ را بیابید.

ب) آیا f در بازه $[0, 10]$ پیوسته است؟



علی هاشمی



پاسخنامه تشریحی

1

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$ وجود ندارد

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ وجود ندارد

ت) $f(2) = 0$

الف) $\lim_{x \rightarrow 7} (-3) = 3$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} (-2x - 7) = -2(0) - 7 = 0 - 7 = -7$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 4x + 5) = 3(-1)^2 - 4(-1) + 5 = 3 + 4 + 5 = 12$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \frac{2^2 - 3(2)}{2^2 - 9} = \frac{0}{0}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x^2 - x} = \frac{0}{2(0)^2 - 0} = \frac{0}{0}$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 + 8}{x + 2} = \frac{(-2)^2 + 8}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$

ح) $\lim_{x \rightarrow -2} [x] =$ وجود ندارد $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} [x] = [(-2)^+] = -2 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} [x] = [(-2)^-] = -3 \end{cases}$

خ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0^+} = 0$

د) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+7} = \sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$

ذ) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x} = \sqrt{0^-} =$ وجود ندارد

ر) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+5} = \sqrt{2+5} = \sqrt{7}$

ز) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-2} = \sqrt{1-2} = \sqrt{-1}$ وجود ندارد

س) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{[x]+1} = \frac{2^+ - 2}{[2^+] + 1} = \frac{2 - 2}{2 + 1} = \frac{0}{3}$

ش) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \cos x = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = \frac{0}{2}$

ص) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

ض) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{[x]} = \frac{(-2)^+}{[(-2)^+]} = \frac{-2}{-2} = 1$

ط) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} = \frac{1 - (1)^2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + [x]) =$ وجود ندارد $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + [x]) = 0^+ + [0^+] = 0 + 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + [x]) = 0^- + [0^-] = 0 + (-1) = -1 \end{cases}$

2



علی هاشمی



۳

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + h(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 3 + (-1) = 2$

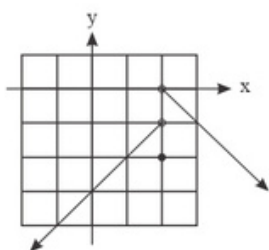
ب) $\lim_{x \rightarrow 2} (h(x))^{\circ} = (\lim_{x \rightarrow 2} h(x))^{\circ} = (-1)^{\circ} = -1$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{3}{0}$ وجود ندارد

ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)} = \frac{0}{3} = 0$

ث) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x) - \Delta h(x)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x) - \Delta \lim_{x \rightarrow 2} h(x)} = \frac{3 \times 3}{0 - \Delta \times (-1)} = \frac{9}{0 + \Delta} = \frac{9}{\Delta}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} h(x)} = \frac{1}{-1} = -1$



۴) تابع f در $x = 2$ ناپیوسته است و در سایر نقاط ناپیوسته است.

۵

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x + 2) = -2(0^-) + 2 = 0 + 2 = 2$

$f(0) = -2(0) + 2 = 0 - 2 = 2$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = (0^+)^2 + 2 = 0 + 2 = 2$

$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \rightarrow$ تابع f در نقطه $x = 0$ پیوسته است.

تابع f در نقاط دیگر به جز $x = 0$ هم پیوسته است.

۶

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ (نادرست است زیرا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$)

پ) $f(2) = 1$ (نادرست است زیرا این حد وجود ندارد)

ت) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$ نادرست

ج) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ درست وجود ندارد

ب) $f(1) = 2$ درست

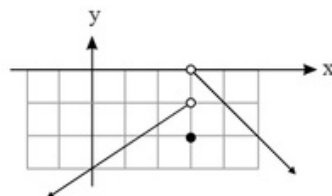
ت) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$ درست

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ درست

ح) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$ درست وجود ندارد

۷

ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم و داریم:



$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ وجود ندارد

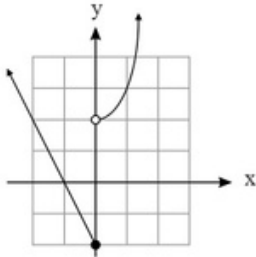
حد و پیوستگی



علی هاشمی



8

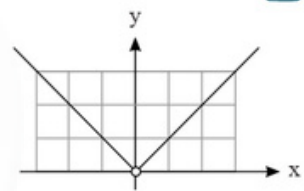


$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{وجود ندارد}$

9

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$f(0) = \text{وجود ندارد}$



10

الف) $f(2) = 2(2) + 1 \rightarrow f(2) = 5$

$g(2) = \text{وجود ندارد}$

$h(2) = 3$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$

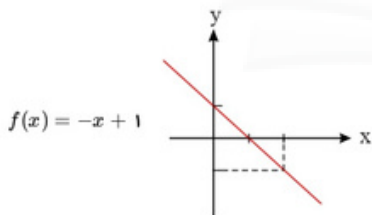
$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2 + x) = 4$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \rightarrow$ تابع f در $x = 2$ پیوسته است.

$g(2) = \text{وجود ندارد} \rightarrow$ تابع g در $x = 2$ پیوسته نیست.

$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) \neq h(2) \rightarrow$ تابع h در $x = 2$ پیوسته نیست.

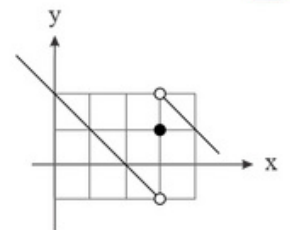
11



$f(x) = -x + 1$

12

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ -x + 5 & x > 2 \end{cases}$$



حد و پیوستگی

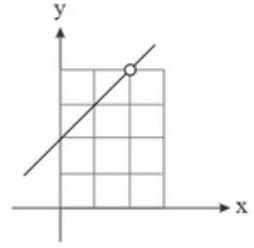


علی هاشمی



$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

۱۳



۱۴

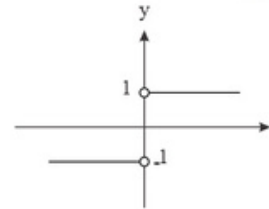
الف) $f(2) = 5$ ، $h(2) = 3$ ، $g(2)$ وجود ندارد

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 5$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود ندارد

۱۵



۱۶

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود ندارد

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$ ت) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) = 2 + 5 = 7$

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x)) =$ وجود ندارد $+(-1) =$ وجود ندارد

ج) $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + 5g(x)) = 2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + 5 \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2(-1) + 5(5) =$ وجود ندارد (وجود ندارد)

$$د) \lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x}$$

ه) $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))^x$ وجود ندارد

$$و) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-1}{\text{وجود ندارد}} =$$
 وجود ندارد

$$ز) \lim_{x \rightarrow 5} (f(x) \cdot g(x)) = 5 \times 5 = 25$$

۱۷

$$f(x) = x + 3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$$

$$g(x) = 5x - 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4$$

حد و پیوستگی



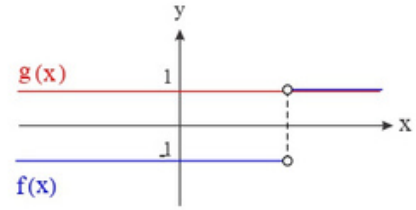
علی هاشمی



$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}, \quad g(x) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ وجود ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 1$$



۱۸

در نقاط $x > 3$ حد دو تابع با هم برابرند.

۱۹ الف - دقیقاً نمی توان گفت که $f + g$ در $x = a$ حد دارد یا ندارد.

ب - حد تابع $f + g$ در $x = a$ وجود ندارد.

۲۰

الف) $\lim_{x \rightarrow m^+} [x] = m$

ب) $\lim_{x \rightarrow m^-} [x] = m - 1$

پ) $\lim_{x \rightarrow m} [x]$ وجود ندارد

۲۱

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 6, \quad f(3) = 6$$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ بنابراین تابع f در $x = 3$ پیوسته است.

$$g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

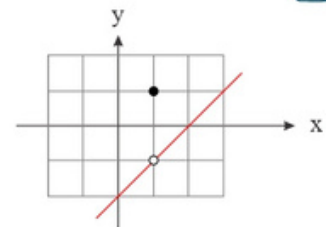
$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 6$$

وجود ندارد $g(3) = 6$ بنابراین تابع g در $x = 3$ پیوسته نیست.

۲۲ تابع $f(x) = [x]$ در نقاط صحیح پیوسته نیست و در سایر نقاط پیوسته است.

۲۳

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



۲۴

تابع f در $x = 1$ پیوسته است.

توابع g, h, k در $x = 1$ پیوسته نیستند.

۲۵

$$f(t) = \begin{cases} 6t + 4 & 0 \leq t < 1 \\ 2t + 10 & 1 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

الف) $f(2) = 2(2) + 10 = 14$

$$f(5) = 2(5) + 10 = 20$$

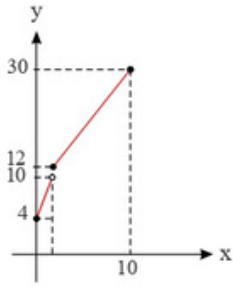
حد و پیوستگی



علی هاشمی



ب) با توجه به نمودار رسم شده مشاهده می شود که تابع f در بازه $[0, 10]$ پیوسته نیست.





سایت بکخون همیشه رایگان

فیلم آموزشی



مشاوره



برنامه ریزی



گام به گام



نمونه سوال



جزوه



کلیک کنید

www.bekhun.com

