

گسسته

۱۲



نمونہ سوالات تالیفی

نوبت اول



bekhunofficial



نام و نام خانوادگی:	بسمه تعالی	آزمون درس: ریاضیات گسسته
کلاس:	اداره آموزش و پرورش منطقه ۱۸	تعداد صفحه: ۲
پایه: دوازدهم	دبیرستان نمونه دولتی فدک	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
رشته: ریاضی	امتحانات نوبت اول دی ماه ۱۴۰۱	
نمره به عدد:	نمره به حروف:	امضای دبیر:

۱	ثابت کنید اگر $a$ برابر مجموع مربع های ۲ عدد صحیح باشد. $2a$ نیز برابر مجموع مربع های دو عدد صحیح است.
۲	گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید.
۰.۵	<b>الف</b> مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
۰.۵	<b>ب</b> اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.
۱	۳ اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.
۱	۴ برای هر سه عدد حقیقی $x, y, z$ ثابت کنید: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$
۱	۵ بزرگ ترین مقدار $x$ را بیابید به طوری که $x$ هر دو عدد $7n - 4$ و $5n + 3$ را بشمارد.
۱	۶ اگر عددی مانند $k$ در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $4k + 1$ و $5k + 6$ ثابت کنید: $25   16k^2 + 28k + 6$
۱	۷ ثابت کنید اگر $n$ عددی طبیعی باشد کسر $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ ساده شدنی نیست.
۱	۸ در تقسیم عدد طبیعی $a$ بر ۲۷ باقیمانده تقسیم ۴ واحد از مربع خارج قسمت کمتر است، بیشترین مقدار ممکن $a$ را بیابید.
۱	۹ اگر باقیمانده تقسیم $a$ بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد؛ باقی مانده تقسیم $a$ بر ۳۰ بیابید.
۱	۱۰ اگر باقیمانده تقسیم $m$ و $n$ بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $5n - 3m$ بر ۱۳ را به دست آورید.
۱	۱۱ باقی مانده تقسیم عدد $A = (1000)^{25} \times 9 + 11$ را بر ۷ بیابید.
۱	۱۲ اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟
۱	۱۳ ثابت کنید می توان دو طرف یک رابطه هم نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح $a, b, c$ و عدد طبیعی $m$ ، اگر $a \equiv b \pmod m$ و $ac \equiv bc \pmod m$
۱	۱۴ معادله هم نهشتی $13 \equiv 3x \pmod{13}$ را حل و جواب عمومی آن را به دست آورید.
۱	۱۵ با تبدیل معادله سیاله خطی $29000 = 5000y + 2000x$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جواب های عمومی این معادله را بیابید.
۱	۱۶ تعداد کل گراف های ساده را روی مجموعه $V = \{a, b, c, d, e\}$ بیابید. همچنین مطلوب است تعداد گراف هایی که: الف - دارای ۵ یال باشد. ب - دارای ۷ یال باشد و یال های $ab, cd, ed$ را شامل باشد.
۱	۱۷ هر گاه $E = \{ac, dc, ed, da, bc, ce\}$ , $V = \{a, b, c, d, e\}$ , $G = (V, E)$ الف - مطلوب است: $p + q + \delta + \Delta$ ب - مطلوب است: $ N_G(a)  +  N_G[e] $



۱

۱۸ اگر درجات رئوس گراف  $G$  به صورت  $2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5$  باشد، اندازه گراف  $\bar{G}$  چقدر است؟

۱

۱۹ در گراف  $K_5$ ، بین ۲ رأس دلخواه و متمایز  $u, v$  چند مسیر متفاوت وجود دارد؟

۱

۲۰ گراف  $P_5$  را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.





## پاسخنامه تشریحی

۱ به روش مستقیم ثابت می‌کنیم: (فرض می‌کنیم  $x$  و  $y$  دو عدد صحیح می‌باشند).

$$a = x^r + y^r \Rightarrow 2a = 2x^r + 2y^r = (x^r + 2xy + y^r) + (x^r - 2xy + y^r) \\ = (x + y)^r + (x - y)^r$$

۲

الف

$$\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in Q^C \\ \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin Q^C$$

نادرست

ب

$$(2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1) = 4 \times 2q = 8q$$

درست

۳ از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

فرض خلف:  $\alpha - \beta$  گویاست.

$$\left. \begin{aligned} \alpha - \beta = m \in Q \\ \alpha + \beta = n \in Q \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\alpha = m + n \Rightarrow \alpha = \frac{m + n}{2} \Rightarrow \alpha \in Q \text{ (تناقض با فرض)}$$

۴

$$x^r + y^r + z^r \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow 2x^r + 2y^r + 2z^r \geq 2xy + 2yz + 2xz \Leftrightarrow (x^r + y^r - 2xy) + (y^r + z^r - 2yz) + (x^r + z^r - 2xz) \geq 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)^r + (y - z)^r + (x - z)^r \geq 0$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است.

۵

$$\left. \begin{aligned} x | 7n - 4 \rightarrow x | 5(7n - 4) \\ x | 5n + 3 \rightarrow x | 7(5n + 3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x | 7(5n + 3) - 5(7n - 4) \rightarrow x | 41$$

بنابراین بیشترین مقدار  $x$  ۴۱ است.

۶

$$5 | 4k + 1 \rightarrow 5^r | (4k + 1)^r \rightarrow 25 | 16k^2 + 8k + 1 \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} 5 | 4k + 1 \\ 5 | 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow 25 | 20k + 5 \quad (II)$$

$$\frac{(I), (II)}{\rightarrow} \begin{cases} 25 | 20k + 5 \\ 25 | 16k^2 + 8k + 1 \end{cases} \rightarrow 25 | 16k^2 + 28k + 6$$

۷ باید ثابت کنیم  $1 = (21n + 4, 14n + 3)$  می‌توان نوشت:

$$(21n + 4, 14n + 3) = (21n + 4 - 14n - 3, 14n + 3) = (7n + 1, 14n + 3) = (1, 7n + 1) = d$$

در نتیجه  $d | 1$  بنابراین  $d = 1$ ، یعنی  $21n + 4, 14n + 3$  هیچ مقسوم علیه مشترکی جز  $\pm 1$  ندارند و کسر مورد نظر ساده شدنی نیست.

۸ طبق فرض داریم:

$$a = 27q + q^r - 4, \quad q^r - 4 < 27$$

بنابراین  $31 > q^r > 5$  و  $q$  بنابرین بیشترین مقدار  $a$  برابر ۱۵۶ بدست می‌آید.

۹ بنابر قضیه تقسیم داریم:

$$\begin{cases} a = 5q + 2 \\ a = 6q' + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a = 30q + 12 \\ 5a = 30q' + 15 \end{cases} \Rightarrow a = 30q'' - 3$$

$$\Rightarrow a = 30r + 27$$

۱۰

$$\left. \begin{aligned} m = 13q_1 + 2 \xrightarrow{\times r} 3m = 13(3q_1) + 6 \\ n = 13q_r + 9 \xrightarrow{\times 5} 5n = 13(5q_r) + 45 \end{aligned} \right\} \rightarrow 5n - 3m = 13q' + 39 \rightarrow 5n - 3m = 13q'' + 0 \rightarrow r = 0$$



دبیرستان فک

دبیرستان فک

گسسته خانم جوانمردی

۱۱

$$1000 \equiv -1 \Rightarrow (1000)^{25} \times 9 + 11 \equiv (-1)^{25} \times 9 + 11 \equiv 2 \Rightarrow r = 2$$

۱۲

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصله اول تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

$$29 + 30 + 30 + 30 + 12 = 131 \rightarrow 131 \equiv 5$$

که متناظر این عدد در جدول روز پنج‌شنبه را نشان می‌دهد.

۱۳

$$a \equiv b \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|c(a - b) \Rightarrow m|ac - bc \Rightarrow ac \equiv bc$$

۱۴

نکته:  $ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv \frac{m}{d} b$

$$3x \equiv 13 \Rightarrow 3x \equiv 13 - 7 \Rightarrow 3x \equiv 6 \xrightarrow{(3,7)=1} x \equiv 2 \Rightarrow x = 7k + 2$$

۱۵

معادله سیاله  $2x + 5y = 29$  دارای جواب است، زیرا:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ (2, 5) \end{pmatrix} | 29$$

$$2x + 5y = 29 \Rightarrow 2x \equiv 29 \pmod{5} \Rightarrow 2x \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 2$$

x را در معادله قرار می‌دهیم:

$$2(5k + 2) + 5y = 29 \Rightarrow 5y = -10k + 25 \Rightarrow y = -2k + 5$$

۱۶

$$\binom{5}{2} = 10 \rightarrow \text{تعداد کل گرافها} = 2^{10} = 1024$$

الف -

$$\text{تعداد گرافها} = \binom{10}{5} = 252$$

ب -

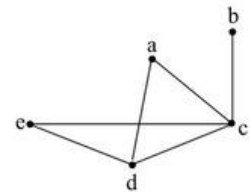
$$7 - 3 = 4, 10 - 3 = 7 \rightarrow \text{تعداد گرافها} = \binom{7}{4} = 35$$

۱۷

$$p = 5, q = 6, \delta = 1, \Delta = 4$$

$$p + q + \delta + \Delta = 16$$

$$\left. \begin{aligned} N_G(a) = \{d, c\} \rightarrow |N_G(a)| = 2 \\ N_G[e] = \{e, c, d\} \rightarrow |N_G[e]| = 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow 2 + 3 = 5$$



۱۸

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q \Rightarrow 5 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 = 2q \Rightarrow q = 12$$

$$q + \bar{q} = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 12 + \bar{q} = \frac{8 \times 7}{2} \Rightarrow 12 + \bar{q} = 28 \rightarrow \bar{q} = 16$$

۱۹



دیرستان فدک

گسسته خانم جوانمردی

دیرستان فدک

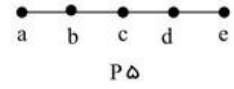
مسیر به طول ۱  $u, v \rightarrow 1$

مسیر به طول ۲  $u, \boxed{3}, v \rightarrow u \underline{3} v \rightarrow 3$

مسیر به طول ۳  $u, \boxed{3}, \boxed{2}, v \rightarrow u \underline{3} \underline{2} v \rightarrow 6$

مسیر به طول ۴  $u, \boxed{3}, \boxed{2}, \boxed{1}, v \rightarrow u \underline{3} \underline{2} \underline{1} v \rightarrow \frac{6}{16}$

۲۰ شکل زیر را در نظر بگیرید:



$abcd$  ,  $bcde$





## سایت بخون همیشه رایگان

فیلم آموزشی



گام به گام



مشاوره



نمونه سوال



برنامه ریزی



جزوه



کلیک کنید

[www.bekhun.com](http://www.bekhun.com)

